

IZPIT iz TEORIJE MERE

25. marec 2009

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{(n+1) \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx.$$

2. [20] S pomočjo dvojnega integrala funkcije

$$f(x, y) = \frac{1}{1+x^2y^2}$$

po primerno izbranem območju izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(x)}{x} dx,$$

kjer je $a > 1$ dano realno število.

3. [20] Naj bo $f \in L^1(X, \mu)$ in $\epsilon > 0$. Pokaži, da obstaja merljiva množica E , da je

$$\mu(E) < \infty \quad \text{in} \quad \int_E |f| d\mu > \int_X |f| d\mu - \epsilon.$$

4. [15] Fatoujeva lema:

- Formuliraj Fatoujevo lemo!
- Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.
- Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{n, n+1, \dots, 2n\}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Vse izračune natančno utemelji!

5. [15] Produktna σ -algebra in produktna mera:

- Navedi definicije pojmov: merljiv pravokotnik, elementarna množica, produktna σ -algebra in monotoni razred!
- Kako opišemo produktno σ -algebro v družini vseh monotoni razredov? Izreka ni potrebno dokazati.
- Navedi mali Fubinijev izrek in potem definicijo produktne mere!
- Utemelji števno aditivnost produktne mere!