IZPIT iz TEORIJE MERE

5. september 2005

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{(n+x)\sin\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}dx.$$
2. [20] S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}$$
po primerno izbranem območju izračunaj integral
$$\int_0^1\frac{\ln(1+y^2)}{y^2}dy.$$
3. [20] Naj bo (X,μ) merljiv prostor s končno mero in $\{f_n\}$ zaporedje realnih merljivih funkcij, ki konvergira k 0 skoraj povsod. Pokaži, da za vsako pozitivno število α velja
$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X:\sup_{k\geq n}|f_k(x)|\geq\alpha\})=0.$$
4. [15] Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK):
   (a) Formuliraj izrek LDK!
   (b) Dokaži izrek! Za katero zaporedje funkcij se uporabi Fatoujeva lema (ki je ni potrebno dokazati)?
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil $\mathbb{N}$. Ali za zaporedje funkcij $f_n=2^{-n}\cdot\chi_{\{1,2,\ldots,n\}}$ $(n\in\mathbb{N})$ veljajo predpostavke izreka LDK? Ali veljajo zaključki izreka?
5. [15] Jensenova neenakost:
   (a) Kdaj pravimo, da je realna funkcija φ na (a,b) $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$ konveksna? Definicijo konveksnosti prikaži tudi grafično! Kako za neskončnokrat odvedljivo funkcijo φ najlažje ugotovimo, ali je konveksna?
   (b) Formuliraj izrek o Jensenovi neenakosti! Izreka ni potrebno dokazati.
   (c) Z uporabo izreka izpelji neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil x_1, x_2, …, x_n.