IZPIT iz TEORIJE MERE

19. september 2005

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] S pomočjo integrala funkcije $f(x) = x\cos x$ po primerno izbranem območju izračunaj vsoto vrste
$$\frac{1}{1\cdot 0!} - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 4!} - \frac{1}{4\cdot 6!} + \cdots .$$

2. [20] Na potenčni množici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množice naravnih števil definiramo pozitivno mero
$$\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1-(-1)^n}{n}$$
in kompleksno mero
$$\lambda(E) = \sum_{n\in E} \frac{1 + i\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n}.$$
Določi mero $|\lambda|$ in izračunaj normo $\|\lambda\|$. Določi Lebesgueov razcep mere λ glede na mero μ in izračunaj Radon-Nikodymov odvod mere λ_a po meri μ.

3. [20] Naj bo (X,μ) merljiv prostor in $1 \le p \le \infty$. Pokaži, da za zaporedje nenegativnih merljivih funkcij $\{f_n\}$ velja
$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_p \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \,.$$

4. [15] Normiran prostor $L^\infty(\mu)$:
   (a) Kako je definirana L^∞-norma $\|f\|_\infty$ merljive funkcije $f : X \to \mathbb{C}$?
   (b) Pokaži, da je $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ skoraj za vsak $x \in X$.
   (c) Katere lastnost norme veljajo za L^∞-normo in katera v splošnem ne velja? Dokaži vse lastnosti, ki veljajo.
   (d) Na kakšen način vseeno dobimo normiran prostor $L^\infty(\mu)$?

5. [15] Aproksimacija merljivih funkcij z enostavnimi in z zveznimi:
   (a) Za katera števila $p \in [1,\infty]$ je množica enostavnih merljivih funkcij iz $L^p(\mu)$ gosta v $L^p(\mu)$? Izrek formuliraj in ga dokaži!
   (b) Za katera števila $p \in [1,\infty]$ je prostor $\mathcal{C}_c(X)$ vseh zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem gost podprostor v prostoru $L^p(X,\mu)$? Tukaj je X lokalno kompakten Hausdorffov topološki prostor in μ pozitivna Borelova mera na X, dobljena po Rieszovem izreku o reprezentaciji. Izrek samo formuliraj.