IZPIT iz TEORIJE MERE

22. september 2006

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 sklopa teoretičnih vprašanj. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\operatorname{arctg} nx + \frac{\pi}{2}}{x^2+1} dx.$$

2. [20] Naj bo $0 < a < b$. S pomočjo dvojnega integrala primerne funkcije dveh spremenljivk po primerno izbranem območju izračunaj integral
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{x^2b^2+1}{x^2a^2+1}\right) dx.$$

3. [20] Naj bosta μ in ν pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{M})$, pri čemer je ν končna mera. Z veliko mero natančnosti dokaži, da je $\nu \ll \mu$ natanko takrat, ko za zaporedje merljivih množic $\{A_n\}$ iz $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n) = 0$.

4. [15] Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK):
   (a) Formuliraj izrek!
   (b) Dokaži izrek! Za katero zaporedje funkcij se uporabi Fatoujeva lema (ki je ni potrebno dokazati)?
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Ali za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$ veljajo predpostavke izreka LDK? Ali veljajo zaključki izreka?

5. [15] Aproksimacija merljivih funkcij z zveznimi:

   Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov topološki prostor in μ pozitivna Borelova mera na X, dobljena po Rieszovem izreku o reprezentaciji.

   (a) Brez dokaza navedi Luzinov izrek!
   (b) Za katera števila $p \in [1, \infty]$ je prostor $\mathcal{C}_c(X)$ vseh zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem gost podprostor prostora $L^p(X, \mu)$? Izrek samo formuliraj. Pojasni, kaj pomeni "gost podprostor". Če za kak $p \in [1, \infty]$ prostor $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ ni gost podprostor prostora $L^p(\mathbb{R})$, to tudi dokaži.