IZPIT iz TEORIJE MERE

17. september 2007

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{nx+1}{nx+n+1} \operatorname{arctg}(nx)\, dx.$$

2. [20] S pomočjo dvojnega integrala funkcije

$$f(x,y) = ye^{xy}$$

po primerno izbranem območju izračunaj integral

$$\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x^2}\, e^x + \frac{x+1}{x^2}\, e^{-x} \right) dx.$$

3. [20] Naj bo μ pozitivna mera na X in A merljiva množica z mero $0 < \mu(A) < \infty$. Pokaži, da velja neenakost

$$\int_A \sqrt{f} d\mu \leq \sqrt{\mu(A)}$$

za vsako merljivo funkcijo $f : X \to [0, \infty)$, za katero je $\int_X f d\mu = 1$. Med temi funkcijami poišči tisto, pri kateri v neenakosti velja enačaj.

4. [15] Fatoujeva lema:

   (a) Formuliraj Fatoujevo lemo!

   (b) Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.

   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = (1 + (-1)^n) \cdot \chi_{\{n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji!

5. [15] Kompleksne mere:

   (a) Kako je definirana totalna variacija $|\mu|$ kompleksne mere μ? Kakšne lastnosti ima? Napiši in dokaži temeljno neenakost med $|\mu|$ in μ.

   (b) Kako definiramo normo na vektorskem prostoru vseh kompleksnih mer na dani σ-algebri $\mathcal{M}$? Dokaži, da ima vse lastnosti norme.

   (c) Kateremu znanemu normiranemu prostoru je izometrično izomorfen normiran prostor vseh kompleksnih mer na potenčni množici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množice naravnih števil? Odgovor utemelji!