IZPIT iz TEORIJE MERE

12. september 2008

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] S pomočjo integrala funkcije $f(x) = \ln(1+x^2)$ po primerno izbranem območju izračunaj vsoto vrste
$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} - \frac{1}{4\cdot 9} + \cdots$$

2. [20] Na potenčni množici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množice naravnih števil definiramo pozitivno mero
$$\mu(E) = \sum_{n\in E}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$
in kompleksno mero
$$\lambda(E) = \sum_{n\in E}\frac{1+i^n}{5^n}.$$
Določi mero $|\lambda|$ in izračunaj normo $\|\lambda\|$. Določi Lebesgueov razcep mere λ glede na mero μ in izračunaj Radon-Nikodymov odvod mere λ_a po meri μ.

3. [20] Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$. Pokaži, da je tedaj
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(nx)dx = a\delta$$
za vsak $a > 0$.

4. [15] Fatoujeva lema:
   (a) Formuliraj Fatoujevo lemo!
   (b) Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = 2\,\chi_{\{n\}} + \chi_{\{2n\}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Vse izračune natančno utemelji!

5. [15] Produktna σ-algebra in produktna mera:
   (a) Navedi definicije pojmov: merljiv pravokotnik, elementarna množica, produktna σ-algebra in monotoni razred!
   (b) Kako opišemo produktno σ-algebro v družini vseh monotonih razredov? Izreka ni potrebno dokazati.
   (c) Navedi mali Fubinijev izrek in potem definicijo produktne mere!
   (d) Utemelji števno aditivnost produktne mere!