3. Izpit iz Teorije mere (B)

16. september 2011

1. S pomočjo integrala funkcije $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ po primerno izbranem intervalu izračunaj vrsto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^{n+1}}.$$

2. Naj bosta $(X, \mathcal{M})$ in $(Y, \mathcal{N})$ merljiva prostora in naj bo $f : X \to Y$ merljiva preslikava. Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{M})$.

   (a) Dokaži, da je s predpisom
   $$\lambda(E) = \mu(f^{-1}(E)) \qquad \text{za vsak } E \in \mathcal{N},$$
   definirana pozitivna mera na $(Y, \mathcal{N})$.

   (b) Če je λ σ-končna, dokaži, da je tudi μ σ-končna.

3. Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ σ-končen merljiv prostor in f_1, f_2 taki merljivi funkciji na X, da velja $f_1 \leq f_2$. Naj bo E merljiva podmnožica v X. Dokaži, da je množica
$$\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$
merljiva množica z mero
$$\int_E (f_2 - f_1) d\mu.$$
(Opomba: Realno os opremimo z Lebesgueovo mero.)

4. Naj bo $1 \leq p \leq \infty$ poljuben. Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj za dano funkcijo $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ obstaja takšna konstanta $M > 0$, da velja $\|f^n\|_p \leq M$ za vsako naravno število n. Dokaži, da je $|f| \leq 1$ skoraj povsod.