Ime in priimek: ______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: _____ Sedež: _____

3. izpit iz Teorije mere

3. september 2012

(1) Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A}$ σ-algebra na X. Naj bo S poljubna podmnožica v X, ki ni vsebovana v $\mathcal{A}$. Dokaži, da velja

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{S\}) = \{(A \cap S) \cup (B \cap (X \backslash S)) : \ A, B \in \mathcal{A}\}.$$

(2) Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je zvezna skoraj povsod glede na Lebesgueovo mero. Dokaži, da je f Lebesgueovo merljiva.

(3) Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tako zaporedje nenegativnih merljivih funkcij na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$, ki konvergira proti 0 skoraj povsod. Dokaži, da za vsako množico A s končno mero v X velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{f_n}{1 + f_n} d\mu = 0.$$

(4) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in f realna merljiva funkcija na X.

(a) Dokaži, da je graf funkcije f merljiva množica v $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(b) Če ima X končno mero, dokaži, da ima graf funkcije f mero 0.

(c) Koliko je mera diagonale kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$? Odgovor dobro utemelji!