Ime in priimek: ______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: _____ Sedež: _____

1. kolokvij iz Teorije mere (B)

6. december 2010

(1) Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{n+x}{n(x^2+2)} \sin\left(\frac{n\pi - 2x}{2n}\right) dx.$$

(2) Naj bosta X in Y topološka prostora, $\mathcal{B}_X$ in $\mathcal{B}_Y$ pa naj bosta zaporedoma Borelovi σ-algebri na X in Y. Naj bo $f : X \to Y$ odprta injektivna preslikava. Dokaži, da velja $f(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{B}_Y$.

(3) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $f : X \to \mathbb{R}$ taka nenegativna funkcija, da velja $\int_X f d\mu < \infty$. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $E \in \mathcal{A}$ s končno mero, da velja

$$\int_E f d\mu > \int_X f d\mu - \epsilon.$$

(4) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z $\mu(X) = \infty$. Naj za vsak $A \in \mathcal{A}$ z $\mu(A) = \infty$ obstaja merljiva podmnožica $B \subseteq A$ s končno pozitivno mero. Dokaži, da za vsako pozitivno realno število α obstaja tak $E \in \mathcal{A}$, da velja $\alpha < \mu(E) < \infty$.