Ime in priimek:______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica:________ Vrsta:_____ Sedež:_____

1. kolokvij iz Teorije mere

7. december 2010

(1) Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{n+x}{x(x^2+2)} \cos\left(\frac{n\pi - 2x}{2n}\right) dx.$$

(2) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor. Za poljubno množico $E \in \mathcal{A}$ definirajmo

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : \ \mu(F) < \infty, F \in \mathcal{A} \text{ in } F \subseteq E\}.$$

Dokaži, da je μ_0 pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

(3) Naj bosta X in Y topološka prostora, $\mathcal{B}_X$ in $\mathcal{B}_Y$ pa naj bosta zaporedoma Borelovi σ-algebri na X in Y. Naj bo $f : X \to Y$ odprta injektivna preslikava. Dokaži, da velja $f(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{B}_2$.

(4) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $f : X \to \mathbb{R}$ taka nenegativna funkcija, da velja $\int_X f d\mu < \infty$. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $E \in \mathcal{A}$ s končno mero, da velja

$$\int_E f d\mu > \int_X f d\mu - \epsilon.$$