Ime in priimek: ______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: _____ Sedež: _____

1. kolokvij iz Teorije mere

6. december 2011

(1) Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f : X \to \mathbb{C}$ funkcija na X. Za poljubno množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mathcal{A}_E = \{F \subseteq E : \ F = E \cap G \text{ za nek } G \in \mathcal{A}\}.$$

(a) Dokaži, da je $(E, \mathcal{A}_E)$ σ-algebra na E.

(b) Dokaži, da je funkcija f merljiva glede na σ-algebro $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko sta funkciji $f|_E$ in $f|_{E^c}$ zaporedoma merljivi glede na σ-algebri $\mathcal{A}_E$ in $\mathcal{A}_{E^c}$.

(2) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tak merljiv prostor, da velja $\mu(X) = 1$. Naj bo dano tako zaporedje $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih množic, da je 1 limita zaporedja $\{\mu(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dokaži, da za vsak $0 < \epsilon < 1$ obstaja podzaporedje $\{E_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, da velja

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > \epsilon.$$

(3) Naj bo f strogo monotona z leve zvezna funkcija na realni osi in μ_f pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera. Naj bosta g in h zvezni funkciji na $\mathbb{R}$. Če je g skoraj povsod enaka h glede na mero μ_f, dokaži, da je g enaka h povsod.

(4) Naj bo podano zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realnih števil. Za vsako naravno število n definirajmo funkcijo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f_n(x) = a_n \chi_{[-n,n]}(x)$.

(a) Poišči potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti ničelni funkciji.

(b) Poišči potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po Lebesgueovi meri proti ničelni funkciji.