1	
2	
3	
4	
Σ	

Teorija mere: 1. kolokvij

11. 12. 2012

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.03)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A}$ končna algebra na X. Dokaži, da obstajajo množice $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$, ki zadoščajo:

a) (10) Če je $A \in \mathcal{A}$ vsebovana v neki od množic E_j, potem je $A = E_j$ bodisi $A = \emptyset$.

b) (6) Množice $E_1, \ldots, E_n$ so paroma disjunktne.

c) (9) Vsaka množica iz $\mathcal{A}$ je končna unija nekaterih množic $E_1, \ldots, E_n$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo f z leve zvezna naraščajoča funkcija na realni osi in μ_f pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

a) (15) Naj bo $a < b$. Dokaži, da je $\mu_f([a, b]) = f(b_+) - f(a)$, kjer je $f(b_+)$ desna limita funkcije f v točki b.

b) (10) Dokaži, da je f zvezna natanko takrat, ko za vsak $a \in \mathbb{R}$ velja $\mu_f(\{a\}) = 0$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo f naraščajoča funkcija na realni osi. Dokaži naslednji trditvi:

a) (15) Funkcija f je Borelovo merljiva.

b) (10) Funkcija F, definirana s predpisom

$$F(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \; f(x) \geq t\},$$

je Borelovo merljiva.

4. naloga (25 točk)

Izračunaj

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{n^2 x + n - 1}{2n^2 x^3 + 2nx^2 + 1} e^{-\frac{x^{2012}}{n}} \, dx.$$