1	
2	
3	
4	
Σ	

Teorija mere: 1. kolokvij

2. 12. 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 110 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.02)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (35 točk)

Naj bo X neprazna množica, $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ naraščajoče zaporedje podmnožic v $\mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Naslednje trditve bodisi dokaži bodisi ovrži s protiprimerom.

a) (9 točk) Če so vse A_n polalgebre na X, potem je $\mathcal{A}$ polalgebra na X.

b) (8 točk) Če so vse A_n algebre na X, potem je $\mathcal{A}$ algebra na X.

c) (8 točk) Če so vse A_n σ-algebre na X, potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X.

d) (10 točk) Dodatna naloga: Naj bo za vsak $m \in \mathbb{N}$ μ_m taka mera na algebri $\mathcal{A}_m$, da za $n > m$ velja $\mu_n|_{\mathcal{A}_m} = \mu_m$. Definirajmo preslikavo μ na $\mathcal{A}$ s predpisom $\mu(A) = \mu_n(A)$, če je $A \in \mathcal{A}_n$. Tedaj je μ mera na algebri $\mathcal{A}$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo f dvakrat odvedljiva naraščajoča konveksna funkcija na realni osi.

a) (6 točk) Utemelji, da obstajata Lebesgue-Stieltjesovi meri μ_f in $\mu_{f'}$.

b) (19 točk) Naj velja $\mu_f = \mu_{f'}$. Določi mero μ_f in izračunaj $\mu_f([0,1])$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Za zaporedje $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih podmnožic množice X definirajmo zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s predpisom $f_n = \chi_{E_n}$. Naj zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj povsod konvergira proti funkciji f. Določi funkcijo f.

4. naloga (25 točk)

Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}$. Definirajmo množico

$$A + B = \{x + y : \ x \in A, \, y \in B\}.$$

a) (12 točk) Če je A zaprta in B kompaktna, dokaži, da je množica $A + B$ zaprta.

b) (13 točk) Če sta A in B zaprti, dokaži, da je množica $A + B$ F_σ-množica.