IME IN PRIIMEK:________________ VPISNA ŠT.: | | | | | | | | |

PREDAVALNICA:______ VRSTA:____ SEDEŽ:____

2. kolokvij iz Teorije mere (B)
24. januar 2011

(1) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo dano zaporedje merljivih množic $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ s končno mero. Za vsak $m \in \mathbb{N}$ definirajmo nenegativno funkcijo $f_m : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ s predpisom

$$f_m(n) = \frac{1}{m}\mu(A_n).$$

(a) Dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti 0.

(b) Če je $\mu(X) < \infty$, dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno.

(c) Ali zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno tudi v primeru, ko je $\mu(X) = \infty$?

(2) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-končen merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo $f : X \to [0, \infty)$ nenegativna merljiva funkcija. Naj bo m Lebesgueova mera na realni osi. Dokaži, da je množica

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty) :\ 0 \le y \le f(x)\}$$

merljiva glede na produktno σ-algebro $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)}$ in izračunaj $(\mu \times m)(G_f)$.

(3) Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in naj bo $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija. Na σ-algebri $\mathcal{A}$ definirajmo realno mero

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu.$$

Določi taki končni pozitivni meri μ_1 in μ_2, da velja $\mu_f = \mu_1 - \mu_2$ in $\mu_1 \perp \mu_2$.

(4) Naj bo μ verjetnostna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in $1 \le p < q < \infty$. Dokaži, da je $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$. Če je $f \in L^q(\mu)$ poljubna funkcija, pokaži, da velja

$$\int_X |f|^p d\mu \le \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$