Ime in priimek: ____________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: ______ Sedež: ______

2. kolokvij iz Teorije mere (P)
24. januar 2011

(1) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo dano zaporedje merljivih množic $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ s končno mero. Za vsak $m \in \mathbb{N}$ definirajmo nenegativno funkcijo $f_m : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ s predpisom

$$f_m(n) = \frac{1}{m}\mu(A_n).$$

(a) Dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti 0.

(b) Če je $\mu(X) < \infty$, dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno.

(c) Ali zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno tudi v primeru, ko je $\mu(X) = \infty$?

(2) S pomočjo Fubinijevega izreka za $0 < a < b$ izračunaj integral

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

(3) Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in naj bo $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija. Na σ-algebri $\mathcal{A}$ definirajmo realno mero

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu.$$

Določi taki končni pozitivni meri μ_1 in μ_2, da velja $\mu_f = \mu_1 - \mu_2$ in $\mu_1 \perp \mu_2$.

(4) Naj bo k poljubno naravno število in $1 \le p < \infty$. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero μ, ki je definirana kot

$$\mu(\{n\}) = \frac{1}{n^k}.$$

Določi vsa nenegativna realna števila t, da bo funkcija f, ki je definirana s predpisom $f(n) = n^t$, element prostora $L^p(\mu)$.