2. kolokvij iz Teorije mere

25. januar 2012

1. S pomočjo določenega integrala primerno izbrane nenegativne funkcije dokaži, da velja
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Naj bo $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ kompleksno zaporedje. Naj bo $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ tako dvojno zaporedje kompleksnih števil, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = a_n$. Če obstaja taka absolutno konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, da pri vsakem $m \in \mathbb{N}$ velja $|a_{m,n}| \leq |b_n|$ za vse $n \in \mathbb{N}$, dokaži, da velja
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3. Naj bosta ν in λ kompleksni meri na merljivih prostorih $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$. Dokaži, da obstaja na produktni σ-algebri $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ natanko ena taka kompleksna mera $\nu \times \lambda$, da je $(\nu \times \lambda)(A \times B) = \nu(A)\lambda(B)$ za poljubni $A \in \mathcal{A}$ in $B \in \mathcal{B}$. (Navodilo za dokaz eksistence: s pomočjo Radon-Nikodymovega izreka reduciraj dokaz na pozitivni meri $|\nu|$ in $|\lambda|$.)

4. Naj bo λ realna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

   (a) Če velja $\lambda(X) \geq 0$, potem je λ pozitivna mera. Dokaži ali poišči protiprimer!

   (b) Če za totalno variacijo $|\lambda|$ mere λ velja $|\lambda|(X) = \lambda(X)$, dokaži, da je λ končna pozitivna mera.