

Teorija mere: 2. kolokvij

21. 1. 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
Σ	

Sedež (2.03)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Naj bo $s > 0$. S pomočjo dvojnega integrala funkcije $e^{-sx} \sin(2xy)$ izračunaj integral

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin^2 x dx.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bosta dana merljiva prostora $(X, \mathcal{P}(X))$ in $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Za $x_1 \in X$ definirajmo mero $\mu = \delta_{x_1}$ na $\mathcal{P}(X)$, ν pa naj bo mera štetja točk na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- (6) Določi produktno mero $\mu \times \nu$.
- (10) Določi $L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times \nu)$.
- (9) Za funkcijo $f \in L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times \nu)$ določi

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y).$$

3. naloga (25 točk)

Naj bosta μ_1 in μ_2 kompleksni meri na merljivem prostoru (X, \mathcal{A}) . Dokaži, da veljata naslednji neenakosti.

$$||\mu_1| - |\mu_2|| \leq |\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$$

4. naloga (25 točk)

Naj bosta μ in ν taki σ -končni pozitivni meri na merljivem prostoru (X, \mathcal{A}) , da velja $\mu \ll \nu \ll \mu$.

- Ali velja $L^1(X, \mu) = L^1(X, \nu)$? Dokaži ali poišči protiprimer.
- Poišči linearno surjektivno izometrijo med prostoroma $L^1(X, \mu)$ in $L^1(X, \nu)$.