1	
2	
3	
4	
Σ	

Teorija mere: 2. kolokvij

17. 1. 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.03)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Naj zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ na X konvergira po točkah proti funkciji f, zaporedje integralov

$$\int_X |f_n| d\mu$$

pa naj konvergira proti 0. Dokaži, da je f enaka 0 skoraj povsod.

2. naloga (25 točk)

Za $0 < a < b$ izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{bx} - e^{ax}}{x(e^{ax}+1)(e^{bx}+1)} dx.$$

Nasvet: integrand zapiši kot razliko primernih ulomkov, prepoznaj ju kot ustrezen določeni integral in uporabi Fubinijev izrek.

3. naloga (25 točk)

Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-končna merljiva prostora. Če je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ in Y vsebuje kako neprazno merljivo množico z ničelno mero v Y, pokaži, da $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ ni poln.

4. naloga (25 točk)

Naj bosta μ_1 in μ_2 končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Definirajmo realno mero $\lambda := \mu_1 - \mu_2$ na $(X, \mathcal{A})$.

a) Dokaži, da velja

$$|\lambda| \leq \mu_1 + \mu_2.$$

b) Dokaži, da za poljubno nenegativno merljivo funkcijo f na X velja

$$\int_X f d|\lambda| \leq \int_X f d\mu_1 + \int_X f d\mu_2.$$