Poglavje 5

Kompleksne mere

5.1 Totalna variacija kompleksne mere

Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor. Zaporedje množic $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ je **particija** množice $E \in \mathcal{M}$, kadar so členi zaporedja paroma disjunktni, njihova unija pa je enaka E.

Kompleksna mera na $\mathcal{M}$ (oziroma na $(X, \mathcal{M})$) je preslikava $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, kadar za vsak $E \in \mathcal{M}$ in vsako particijo $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ množice E velja

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Tukaj zahtevamo, da vrsta (kompleksnih števil) konvergira; pri pozitivnih vrstah je lahko divergirala. Ker unija množic ni odvisna od njihovega vrstnega reda, vrsta pri poljubnem vrstnem redu členov konvergira proti isti vrednosti $\mu(E)$ in zato dejansko absolutno konvergira (po znanem izreku iz teorije številskih vrst). Med pozitivnimi merami so kompleksne mere samo tiste, ki so končne.

Naj bo μ kompleksna mera na $(X, \mathcal{M})$. **Totalna variacija** ali **absolutna vrednost** mere μ je preslikava $|\mu| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, definirana s predpisom

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ particija množice } E \right\}.$$

Očitno je $|\mu|(\emptyset) = 0$. Če izberemo trivialno particijo $E_1 = E$, $E_j = \emptyset$ za $j \geq 2$, dobimo osnovno relacijo med kompleksno mero μ in njeno totalno variacijo: $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$.

Naj za merljivi množici E in F velja $F \subseteq E$. Če od particij množice E upoštevamo le take, za katere je $E_1 = E \setminus F$, dobimo neenakost

$$|\mu|(E) \geq \sup \left\{ |\mu(E \setminus F)| + \sum_{j=2}^{\infty} |\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j=2}^{\infty} \text{ particija za } F \right\} =$$

$$= |\mu(E \setminus F)| + |\mu|(F),$$

torej posebej velja $|\mu|(F) \leq |\mu|(E)$.

Izrek 5.1 *Totalna variacija kompleksne mere je končna pozitivna mera.*

Dokaz. Dokažimo le, da je $|\mu|$ pozitivna mera, medtem ko dokaz njene končnosti izpustimo. Naj bo $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ particija množice $E \in \mathcal{M}$. Dokazati moramo, da je

$$|\mu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).$$

Dovolj je obravnavati primer, ko je $|\mu|(E_i) < \infty$ za vsak i, saj je v nasprotnem primeru $|\mu|(E) = \infty$ (zaradi monotonosti, ki smo jo dokazali pred izrekom) in sta obe strani enakost enaki ∞ (kar v resnici sploh ni mogoče po izpuščenem delu dokaza). Izberimo $\epsilon > 0$. Za vsako množico E_i lahko najdemo tako njeno particijo $\{A_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{i,j})| > |\mu|(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Ker je $\{A_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ particija množice E, imamo

$$|\mu|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{i,j})| \geq \sum_{i=1}^{\infty}\left(|\mu|(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) - \epsilon.$$

Ker je ϵ poljuben, velja torej neenakost $|\mu|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$.

Za dokaz obratne neenakosti moramo za poljubno particijo $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ množice $E \in \mathcal{M}$ pokazati neenakost

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).$$

Ker je $\{A_j \cap E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ particija množice A_j, imamo

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)|.$$

Ker je $\{A_j \cap E_i\}_{j\in\mathbb{N}}$ particija množice E_i, je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \leq |\mu|(E_i)|$$

in zato velja neenakost

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i),$$

ki smo jo želeli dokazati. □

Naj bo $M(X, \mathcal{M})$ množica vseh kompleksnih mer na σ-algebri $\mathcal{M}$. Za $\mu, \nu \in M(X, \mathcal{M})$ in $c \in \mathbb{C}$ s predpisoma

$$(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E) \text{ in } (c\mu)(E) = c\mu(E)$$

definiramo kompleksni meri $\mu + \nu$ in $c\mu$ na $\mathcal{M}$. Tako je $M(X, \mathcal{M})$ kompleksni vektorski prostor. Naj njem lahko definiramo normo s predpisom $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Po zadnjem izreku je $|\mu|(X) \in [0, \infty)$, ostale lastnosti norme pa je lahko preveriti.

Kompleksna mera μ na $(X, \mathcal{M})$ je **realna**, če ima samo realne vrednosti. Za realno mero $\mu \in M(X, \mathcal{M})$ s predpisoma

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \text{ in } \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

definiramo pozitivni končni meri v $M(X, \mathcal{M})$, saj iz neenakosti $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$ sledi $\mu^{\pm}(E) = \frac{1}{2}(|\mu|(E) \pm \mu(E)) \geq 0$ za vsak $E \in \mathcal{M}$. Meri μ^+ in μ^- zaporedoma imenujemo **pozitivna** in **negativna variacija** realne mere μ. Zanju veljata relaciji

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \text{ in } |\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

ki ju očitno definirata.

5.2 Radon-Nikodymov izrek

Naj bo μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{M})$ in λ bodisi pozitivna bodisi kompleksna mera na $(X, \mathcal{M})$. Mera λ je **absolutno zvezna** glede na mero μ, kadar iz $\mu(E) = 0$ sledi $\lambda(E) = 0$. To dejstvo na kratko označimo z $\lambda << \mu$. Mera λ je **skoncentrirana na** množici $A \in \mathcal{M}$, kadar velja $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ za vsak $E \in \mathcal{M}$, oziroma ekvivalentno: za vsako merljivo množico $E \subseteq A^c$ velja $\lambda(E) = 0$.

Naj bosta (kompleksni ali pozitivni) meri λ_1 in λ_2 skoncentrirani zaporedoma na množicah A_1 in A_2. Če je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, potem pravimo, da sta λ_1 in λ_2 **vzajemno singularni** oziroma **ortogonalni**, kar označimo kot $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Lastnosti v naslednji trditvi ni težko dokazati.

Trditev 5.2 *Naj bo μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{M})$ in λ, λ_1, λ_2 bodisi pozitivne bodisi kompleksne mere na $(X, \mathcal{M})$. Potem veljajo trditve:*

1. *Če je λ skoncentrirana na množici $A \in \mathcal{M}$, potem to velja tudi za $|\lambda|$;*

2. *Če je $\lambda_1 \perp \lambda_2$, potem je $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$;*

3. *Če je* $\lambda_1 \perp \mu$ *in* $\lambda_2 \perp \mu$*, potem je* $(\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$*;*

4. *Če je* $\lambda_1 << \mu$ *in* $\lambda_2 << \mu$*, potem je* $(\lambda_1 + \lambda_2) << \mu$*;*

5. *Če je* $\lambda << \mu$*, potem je* $|\lambda| << \mu$*;*

6. *Če je* $\lambda_1 << \mu$ *in* $\lambda_2 \perp \mu$*, potem je* $\lambda_1 \perp \lambda_2$*;*

7. *Če je* $\lambda << \mu$ *in* $\lambda \perp \mu$*, potem je* $\lambda = 0$*.*

Kadar je λ kompleksna mera, lahko pogoj za absolutno zveznost med merama λ in μ formuliramo z ϵ-om in δ-o.

Trditev 5.3 *Naj bosta* μ *in* λ *zaporedoma pozitivna in kompleksna mera na* $(X, \mathcal{M})$*. Potem je* $\lambda << \mu$ *natanko tedaj, ko za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja tak* $\delta > 0$*, da je* $|\lambda(E)| < \epsilon$ *za vsako merljivo množico* E *z mero* $\mu(E) < \delta$*.*

Dokaz. Hitro vidimo, da je pogoj zadosten. Če je namreč $\mu(E) = 0$, potem je $|\lambda(E)| < \epsilon$ za vsak $\epsilon > 0$, torej $\lambda(E) = 0$.

Za dokaz njegove potrebnosti predpostavimo, da ne velja in poiščimo tako merljivo množico A, da je $\mu(A) = 0$ in $|\lambda|(A) > 0$. To bo pomenilo, da $|\lambda|$ ni absolutno zvezna glede na μ, toda potem po zadnji trditvi tudi mera λ ni absolutno zvezna glede na μ, s čimer bo dokaz končan.

Po naši predpostavki torej obstaja tak $\epsilon > 0$, pri katerem lahko najdemo zaporedje $\{E_n\}$ merljivih množic, da je $\mu(E_n) < 2^{-n}$ in $|\lambda(E_n)| \geq \epsilon$. Postavimo $A_n = \cup_{j=n}^{\infty} E_j$ in $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Potem je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ in

$$\mu(A_n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \mu(E_j) < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zato je $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ in $|\lambda|(A) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(A_n) \geq \epsilon$, saj je $|\lambda|(A_n) \geq |\lambda|(E_n) \geq \epsilon$. Tako je A iskana množica. □

Posledica 5.4 *Naj bo* μ *pozitivna mera na* $(X, \mathcal{M})$ *in* $f \in L^1(X, \mu)$*. Potem za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja tak* $\delta > 0$*, da je* $\int_E |f|\, d\mu < \epsilon$ *za vsako merljivo množico* E *z mero* $\mu(E) < \delta$*.*

Dokaz. S predpisom $\lambda(E) = \int_E |f|\, d\mu$ je definirana končna pozitivna mera na $(X, \mathcal{M})$, ki je očitno absolutno zvezna glede na μ. Zato lahko uporabimo zadnjo trditev. □

Naj bo μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{M})$ in $h \in L^1(\mu)$. S predpisom $\lambda(E) = \int_E h\, d\mu$ je definirana kompleksna mera λ na $(X, \mathcal{M})$, ki je očitno absolutno zvezna glede na μ. Naslednji izrek, ki ga navajamo brez dokaza, trdi obratno, da je take oblike vsaka kompleksna mera, ki je absolutno zvezna glede na σ-končno pozitivno mero μ.

Izrek 5.5 *Naj bo μ pozitivna σ-končna mera na $(X, \mathcal{M})$ in λ kompleksna mera na $(X, \mathcal{M})$. Potem veljata trditvi:*

*(a) (***Lebesgueov razcep mere***) Obstajata natanko določeni kompleksni meri λ_a in λ_s na $(X, \mathcal{M})$, da je*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \;\; \lambda_a << \mu \;\, in \;\, \lambda_s \perp \mu.$$

*(b) (***Radon-Nikodymov izrek***) Obstaja natanko določeni (ekvivalenčni razred) $h \in L^1(\mu)$, da je*

$$\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu$$

za vsak $E \in \mathcal{M}$.

Posebej, če je $\lambda << \mu$, potem je $\lambda_a = \lambda$, $\lambda_s = 0$ in obstaja natanko določeni (ekvivalenčni razred) $h \in L^1(\mu)$, da je $\lambda(E) = \int_E h\, d\mu$ za vsak $E \in \mathcal{M}$.

Funkcijo h iz točke (b) imenujemo **Radon-Nikodymov odvod** mere λ_a po meri μ. Pogosto se uporablja oznako

$$d\lambda_a = h\, d\mu \quad \text{ali} \quad h = \frac{d\lambda_a}{d\mu}.$$

V posebnem primeru $\mu = |\lambda|$ lahko o Radon-Nikodymovem odvodu mere λ po meri $|\lambda|$ povemo še več.

Izrek 5.6 *Naj bo λ kompleksna mera na $(X, \mathcal{M})$. Potem je $\lambda << |\lambda|$ in za Radon-Nikodymov odvod h mere λ po meri $|\lambda|$ velja $|h| = 1$ skoraj povsod glede na μ.*

Razcep $d\lambda = h\, d|\lambda|$ v zadnjem izreku imenujemo **polarni razcep** kompleksne mere λ, saj je to posplošitev polarnega zapisa kompleksnega števila $z = |z|e^{i\varphi}$.