Poglavje 2

LEBESGUEOV INTEGRAL

2.1 Merljive funkcije

Preslikava $f : X \to Y$ med merljivima prostoroma $(X, \mathcal{M})$ in $(Y, \mathcal{N})$ je $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-**merljiva**, kadar je $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ za vse $E \in \mathcal{N}$. Kadar je Y topološki prostor in za $\mathcal{N}$ vzamemo Borelovo σ-algebro $\mathcal{B}_Y$, pravimo, da je f $\mathcal{M}$-**merljiva** oziroma na kratko **merljiva**, če je jasno, kaj je $\mathcal{M}$. Kadar pa je tudi X topološki prostor in $\mathcal{M} = \mathcal{B}_X$, pravimo, da je preslikava f **Borelova** oziroma **Borelovo merljiva**.

Realna (ali kompleksna) funkcija f na $\mathbb{R}$ je **Lebesgueovo merljiva**, kadar je $\mathcal{L}$-merljiva, tj. ko je $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$ za vse $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (ali $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$). Ker je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}$, je očitno taka vsaka Borelova funkcija.

Trditev 2.1 *Naj bosta $(X, \mathcal{M})$ in $(Y, \mathcal{N})$ merljiva prostora in naj bo σ-algebra $\mathcal{N}$ generirana z družino $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$. Potem je preslikava $f : X \to Y$ $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-merljiva natanko tedaj, ko je $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ za vse $E \in \mathcal{E}$.*

Dokaz. Očitno je pogoj potreben. Za dokaz zadostnosti najprej pokažimo, da je družina množic $\mathcal{N}_0 = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ σ-algebra. Ker je $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{M}$, je $Y \in \mathcal{N}_0$. Če je $E \in \mathcal{N}_0$, potem je $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{M}$, torej je $E^c \in \mathcal{N}_0$. Če je E_1, E_2, ... zaporedje množic v $\mathcal{N}_0$, potem je $f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) \in \mathcal{M}$ in zato je $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}_0$.

To pomeni, da je $\mathcal{N}_0$ σ-algebra, ki po predpostavki vsebuje $\mathcal{E}$. Zato je $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_0$ in tako je f $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-merljiva. □

Posledica 2.2 *Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor in Y topološki prostor. Potem je preslikava $f : X \to Y$ $\mathcal{M}$-merljiva natanko tedaj, ko je $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ za vsako odprto množico $U \subseteq Y$.*

Dokaz. Ker odprte množice v Y generirajo Borelovo σ-algebro $\mathcal{B}_Y$, je f $\mathcal{M}$-merljiva po trditvi. $\square$

Posledica 2.3 *Če sta X in Y topološka prostora, potem je vsaka zvezna preslikava $f : X \to Y$ Borelova.*

Dokaz. Preslikava f je zvezna, kadar je $f^{-1}(U)$ odprta množica v X za vsako odprto množico $U \subseteq Y$. To pomeni, da je $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}_X$ za vsako odprto množico $U \subseteq Y$. Zato je po prejšnji posledici f Borelovo merljiva. $\square$

Trditev 2.4 *Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor. Funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ je $\mathcal{M}$-merljiva natanko tedaj, ko je $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$ za vsako realno število a.*

Dokaz. Dokazati moramo le zadostnost pogoja. Bazo topologije na razširjeni realni osi $[-\infty, \infty]$ sestavljajo intervali oblike (a, b), $(a, \infty]$ in $[-\infty, b)$, kjer $a, b \in \mathbb{R}$. Vsako odprto množico lahko zapišemo kot števno unijo takih intervalov. To pomeni, da družina takih intervalov generira Borelovo σ-algebro $\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Zato je po trditvi 2.1 dovolj dokazati, da je $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{M}$ in $f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{M}$ za vsa realna števila a in b. Za dokaz slednje trditve izberimo strogo naraščajoče zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki konvergira proti b. Potem je

$$[-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, b_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b_n, \infty]^c$$

in zato

$$f^{-1}([-\infty, b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1}((b_n, \infty]))^c \in \mathcal{M},$$

kjer smo upoštevali predpostavko in lastnosti σ-algebre. Iz enakosti

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, \infty] \cap [-\infty, b)) = f^{-1}((a, \infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b))$$

sledi, da je tudi $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{M}$. $\square$

Trditev 2.5 *Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor, Y in Z pa topološka prostora. Naj bo preslikava $f : X \to Y$ $\mathcal{M}$-merljiva in preslikava $g : Y \to Z$ Borelova (v posebnem zvezna). Potem je preslikava $h = g \circ f : X \to Z$ $\mathcal{M}$-merljiva.*

Dokaz. Naj bo $E \subseteq Z$ Borelova množica. Ker je g Borelova, je $g^{-1}(E)$ Borelova množica v Y. Ker je $f : X \to Y$ $\mathcal{M}$-merljiva, je $h^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathcal{M}$, torej je h $\mathcal{M}$-merljiva. $\square$

Trditev 2.6 *Naj bosta u in v realni merljivi funkciji na merljivem prostoru $(X, \mathcal{M})$ in ϕ Borelova preslikava iz $\mathbb{R}^2$ v topološki prostor Y. Potem je merljiva tudi preslikava $f : X \to Y$, definirana s predpisom*

$$f(x) = \phi(u(x), v(x)) \quad (x \in X).$$

Dokaz. Definirajmo preslikavo $g : X \to \mathbb{R}^2$ s predpisom $g(x) = (u(x), v(x))$. Ker je $f = \phi \circ g$, je po trditvi 2.5 dovolj pokazati merljivost preslikave g. Prepričajmo se najprej, da je $g^{-1}(P) \in \mathcal{M}$ za vsak odprt pravokotnik $P = (a, b) \times (c, d)$. Ker je

$$g^{-1}(P) = \{x \in X : u(x) \in (a, b), v(x) \in (c, d)\} =$$

$$= \{x \in X : u(x) \in (a, b)\} \cap \{x \in X : v(x) \in (c, d)\} = u^{-1}((a, b)) \cap v^{-1}((c, d)),$$

je $g^{-1}(P) \in \mathcal{M}$ zaradi merljivosti funkcij u in v.

Ker je vsaka odprta množica v $\mathbb{R}^2$ števna unija odprtih pravokotnikov, je Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ generirana z družino vseh odprtih pravokotnikov. Zato je po trditvi 2.1 preslikava g merljiva. □

Posledica 2.7 *Za funkcije na merljivem prostoru X veljajo trditve:*

(a) Če je $f = u + iv$, kjer sta u in v realni merljivi funkciji na X, potem je f kompleksna merljiva funkcija na X.

(b) Če je $f = u + iv$ kompleksna merljiva funkcija na X, potem sta u in v realni merljivi funkciji na X.

(c) Če sta f in g kompleksni merljivi funkciji na X ter $\lambda \in \mathbb{C}$, potem so merljive tudi funkcije $f + g$, λf in fg. Torej je družina vseh kompleksnih merljivih funkcij na X algebra.

Dokaz. (a) Trditev 2.6 uporabimo za zvezno funkcijo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definirano s $\phi(s, t) = s + it$.

(b) Trditev 2.5 uporabimo zaporedoma za zvezni funkciji $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definirani s predpisoma $g(z) = \operatorname{Re} z$ in $g(z) = \operatorname{Im} z$.

(c) Najprej obravnavajmo primer, ko sta f in g realni funkciji. Če v trditvi 2.6 vzamemo zaporedoma zvezni funkciji $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirani s $\phi(s, t) = s + t$ in $\phi(s, t) = st$, dobimo merljivost funkcij $f + g$ in fg. Če v produktu fg za g vzamemo konstantno funkcijo -1 (ki je jasno merljiva), dobimo še merljivost funkcije $-f$.

Denimo sedaj splošno, da je $f = u_1 + iv_1$ in $g = u_2 + iv_2$, kjer so u_1, v_1, u_2 in v_2 realne funkcije na X, ki so merljive po (b). Potem je $f + g = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$ merljiva funkcija po prejšnjem realnem primeru in po (a). Podobno vidimo, da je

$fg = (u_1u_2 - v_1v_2) + i(u_1v_2 + u_2v_1)$ merljiva funkcija. Če v produktu fg za g vzamemo konstantno funkcijo λ (ki je merljiva), dobimo še merljivost funkcije λf. S tem je dokaz končan. $\square$

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $[-\infty,\infty]$. Definirajmo zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s predpisom $b_n = \sup_{k\geq n} a_k$. Očitno je $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$. Zato smemo definirati **limes superior** oziroma **zgornjo limito** zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kot

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Podobno definiramo **limes inferior** oziroma **spodnjo limito** zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kot

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje funkcij iz X v $[-\infty,\infty]$. Definirajmo funkciji $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $\limsup_{n\to\infty} f_n$ iz X v $[-\infty,\infty]$ s predpisoma

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{in} \quad (\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Podobno po točkah definiramo funkcije $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ter $\max\{f_1, f_2\}$ in $\min\{f_1, f_2\}$. Zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergira po točkah**, kadar je za vsak $x \in X$ zaporedje $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno. Tedaj smemo definirati funkcijo $f = \lim_{n\to\infty} f_n : X \to [-\infty,\infty]$ s predpisom $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Trditev 2.8 *Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz X v $[-\infty,\infty]$. Potem so merljive tudi funkcije $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Če zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah, potem je merljiva tudi funkcija $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da je funkcija $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ merljiva. Ker za $a \in \mathbb{R}$ velja

$$g^{-1}((a,\infty]) = \{x : g(x) > a\} = \{x : f_n(x) > a \text{ za neki } n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty]),$$

je $g^{-1}((a,\infty])$ merljiva množica za vsak $a \in \mathbb{R}$, torej je g merljiva po trditvi 2.4. Očitno je za vsako merljivo funkcijo $h : X \to [-\infty,\infty]$ merljiva tudi funkcija $-h$. Zato je merljiva funkcija $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$. Ker je

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} f_k\right),$$

je funkcija $\limsup_{n\to\infty} f_n$ merljiva in enako velja za funkcijo $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Če zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah, je $f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$ in je zato merljiva funkcija. $\square$

Posledica 2.9 *Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij na X, ki konvergira po točkah proti funkciji f. Potem je f merljiva funkcija.*

Dokaz. Uporabimo posledico 2.7 in trditev 2.8. $\square$

Posledica 2.10 *Če sta f in g merljivi funkciji iz X v $[-\infty,\infty]$, potem sta merljivi tudi* $\max\{f,g\}$ *in* $\min\{f,g\}$.

Dokaz. Trditev 2.8 uporabimo za zaporedje $f_1 = f$ in $f_n = g$ za $n > 1$. $\square$

Pozitivni in **negativni del** funkcije $f : X \to [-\infty,\infty]$ sta funkciji f^+ in f^- na X, definirani s predpisoma

$$f^+ = \max\{f,0\}\ ,\quad f^- = \max\{-f,0\} = -\min\{f,0\}.$$

Očitno je $f = f^+ - f^-$ in $|f| = f^+ + f^-$. Če je funkcija f merljiva, potem sta merljivi tudi funkciji f^+ in f^- po posledici 2.10. Prav tako je merljiva tudi funkcija $|f|$, saj je $|f| = \max\{f,-f\}$.

Podobno kot kompleksno število lahko kompleksno funkcijo f na X zapišemo v **polarnem zapisu**

$$f = |f|\,\mathrm{sgn}(f),\ \text{kjer je}$$
$$\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} z/|z| & , \text{ če } z \neq 0, \\ 1 & , \text{ če } z = 0 \end{cases}$$

in $\mathrm{sgn}(f) = \mathrm{sgn} \circ f$.

Trditev 2.11 *Če je kompleksna funkcija f na X merljiva, potem sta funkciji $|f|$ in* $\mathrm{sgn}(f)$ *tudi merljivi.*

Dokaz. Če trditev 2.5 uporabimo za zvezno funkcijo $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom $g(z) = |z|$, dobimo merljivost funkcije $|f| = g \circ f$.

Funkcija $\mathrm{sgn} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je zvezna povsod, razen v točki 0. Če je $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, potem je $\mathrm{sgn}^{-1}(U)$ bodisi odprta množica bodisi oblike $V \cup \{0\}$, kjer je $V \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. V obeh primerih je $\mathrm{sgn}^{-1}(U)$ Borelova množica, zato je funkcija sgn Borelova. Ker je $\mathrm{sgn}(f) = \mathrm{sgn} \circ f$, je $\mathrm{sgn}(f)$ merljiva po trditvi 2.5. $\square$

Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor. **Karakteristična funkcija** $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ množice $E \subseteq X$ je definirana s predpisom

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ če } x \in E, \\ 0 & , \text{ če } x \notin E. \end{cases}$$

V teoriji verjetnosti se običajno imenuje **indikatorska funkcija** in zaznamuje z 1_E. Ker za poljubno množico $A \subseteq \mathbb{R}$ velja

$$\chi_E^{-1}(A) = \begin{cases} X & , \text{ če } 0 \in A, 1 \in A \\ E & , \text{ če } 0 \notin A, 1 \in A \\ E^c & , \text{ če } 0 \in A, 1 \notin A \\ \emptyset & , \text{ če } 0 \notin A, 1 \notin A \end{cases},$$

je karakteristična funkcija χ_E merljiva natanko tedaj, ko je množica E merljiva.

Kompleksna merljiva funkcija s na X je **enostavna**, kadar je njena zaloga vrednosti končna množica. Če je le ta enaka $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, potem so $E_j = s^{-1}(\{z_j\})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ paroma disjunktne merljive množice, katerih unija je enaka X. Z njimi lahko s zapišemo kot

$$s = \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j},$$

kar imejujemo **standardna reprezentacija** enostavne funkcije s. Torej so enostavne funkcije linearne kombinacije merljivih karakterističnih funkcij. Ker sta vsota in produkt dveh enostavnih funkcij tudi enostavni funkciji, je družina vseh enostavnih funkcij na X algebra.

Izrek 2.12 *Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor.*

(a) Če je $f : X \to [0, \infty]$ merljiva funkcija, potem obstaja zaporedje $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enostavnih funkcij, ki po točkah konvergira proti f in zanj velja $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq f$.

(b) Če je $f : X \to \mathbb{C}$ merljiva funkcija, potem obstaja zaporedje $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enostavnih funkcij, ki po točkah konvergira proti f in zanj velja $0 \leq |s_1| \leq |s_2| \leq |s_3| \leq \ldots \leq |f|$.

V obeh točkah lahko dodatno zahtevamo še, da je konvergenca enakomerna na vseh množicah, na katerih je funkcija f omejena.

Dokaz. (a) Za $n \in \mathbb{N}$ in $k = 1, 2, \ldots, n2^n$ definirajmo merljive množice

$$E_{n,k} = \left\{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \right) \quad \text{in}$$

$$F_n = \{x \in X : n \leq f(x)\} = f^{-1}([n, \infty]).$$

Pri fiksnem n so množice $F_n, E_{n,1}, E_{n,2}, \ldots, E_{n,n2^n}$ paroma disjunktne in njihova unija je enaka X. Zaporedje $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enostavnih funkcij definirajmo s

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}.$$

(Grafično prikaži funkciji s_1 in s_2!) Potem se je lahko prepričati, da za vsak n velja $s_n \leq s_{n+1}$ in $0 \leq f - s_n \leq 2^{-n}$ na množici $f^{-1}([0,n])$. Od tod sledi, da $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti f v vseh točkah, kjer je $f(x) < \infty$, in da je konvergenca enakomerna na vseh množicah, na katerih je funkcija f omejena. V točkah, kjer je $f(x) = \infty$, je $s_n(x) = n$, torej tudi tedaj zaporedje $\{s_n(x)\}$ konvergira proti $f(x)$.

(b) Pišimo $f = u + iv$, kjer sta u in v realni merljivi funkciji. Če sedaj uporabimo točko (a) za nenegativne merljive funkcije u^+, u^-, v^+ in v^-, dobimo zaporedoma naraščajoča zaporedja $\{p_n^+\}$, $\{p_n^-\}$, $\{q_n^+\}$ in $\{q_n^-\}$ enostavnih funkcij, ki po točkah konvergirajo k njim. Potem je $s_n = p_n^+ - p_n^- + i(q_n^+ - q_n^-)$ enostavna merljiva funkcija za vsak n. Enostavno je preveriti, da je $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iskano zaporedje. □

Dogovorimo se za računska pravila na intervalu $[0,\infty]$. Za $a \in [0,\infty]$ definiramo vsoto $a + \infty = \infty + a = \infty$. Za $a \in (0,\infty]$ definiramo produkt $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, medtem ko postavimo $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Lahko se je prepričati, da tedaj v $[0,\infty]$ še vedno veljajo zakoni komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti.

Trditev 2.13 *Če sta f in g merljivi funkciji iz X v $[0,\infty]$, potem sta merljivi tudi funkciji $f + g$ in fg.*

Dokaz. Po izreku 2.12 obstajata naraščajoči zaporedji $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih enostavnih funkcij, ki po točkah konvergirata zaporedoma proti f in g. Potem zaporedji $\{s_n + t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{s_n t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enostavnih funkcij po točkah naraščata zaporedoma proti $f + g$ in fg, ki sta zato merljivi funkciji zaradi trditve 2.8. □

2.2 Integriranje nenegativnih funkcij

V tem razdelku fiksirajmo merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Naj bo $s : X \to [0,\infty)$ enostavna funkcija s standardno reprezentacijo $s = \sum_{j=1}^n c_j\chi_{E_j}$. **Lebesgueov integral** funkcije s **glede na mero** μ je definiran kot

$$\int s\, d\mu = \sum_{j=1}^n c_j\mu(E_j).$$

Vrednost integrala pripada intervalu $[0, \infty]$. Kadar imamo samo eno mero, pišemo tudi krajše $\int s$. Po drugi strani pišemo $\int s(x)\, d\mu(x)$, če x ni edina obravnavana spremenljivka. Nekateri v tem primeru raje pišejo $\int s(x)\, \mu(dx)$.

Trditev 2.14 *Za enostavni funkciji $s, t : X \to [0, \infty)$ in za $c \in [0, \infty)$ velja:*

(a) $\int cs\, d\mu = c \int s\, d\mu$;

(b) $\int (s + t)\, d\mu = \int s\, d\mu + \int t\, d\mu$;

(c) Če je $s \leq t$, potem je $\int s\, d\mu \leq \int t\, d\mu$.

Dokaz. Dokaz točke (a) je enostaven, zato ga izpustimo. V dokazu točke (b) naj bosta $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$ in $t = \sum_{k=1}^m d_k \chi_{F_k}$ standardni reprezentaciji za s in t. Ker je $\cup_{j=1}^n E_j = \cup_{k=1}^m F_k = X$, je vsak E_j disjunktna unija množic $\{E_j \cap F_k\}_{k=1}^m$, vsak F_k pa disjunktna unija množic $\{E_j \cap F_k\}_{j=1}^n$. Zato je zaradi končne aditivnosti mere

$$\int s\, d\mu + \int t\, d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^m d_j \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (c_j + d_k) \mu(E_j \cap F_k),$$

kar pa je enako integralu vsote $s + t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (c_j + d_k) \chi_{E_j \cap F_k}$. S tem je (b) dokazana.

Če je poleg tega $s \leq t$, potem iz $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ sledi $c_j \leq d_k$. Zato velja

$$\int s\, d\mu = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m d_k \mu(E_j \cap F_k) = \int t\, d\mu,$$

s čimer je dokazana tudi točka (c). □

Naj bo $f : X \to [0, \infty]$ merljiva funkcija. **Lebesgueov integral** funkcije f **glede na mero** μ definiramo kot

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int s\, d\mu : 0 \leq s \leq f \text{ in } s \text{ enostavna funkcija} \right\}.$$

Ta definicija se v primeru enostavne funkcije ujema s prejšnjo, kar sledi iz trditve 2.14 (c).

Definicijo razširimo na integral po poljubni množici $A \in \mathcal{M}$ s predpisom

$$\int_A f\, d\mu = \int f \chi_A\, d\mu,$$

kar v primeru enostavne funkcije $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ pomeni

$$\int_A s\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j \cap A).$$

Z uporabo trditve 2.14 je lahko dokazati, da za merljivi funkciji $f, g : X \to [0, \infty]$, za $A \in \mathcal{M}$ in za $c \in [0, \infty)$ velja

$$\int_A cf\, d\mu = c \int_A f\, d\mu \quad \text{in} \quad \int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu, \quad \text{če je } f \leq g \quad \text{na množici} \quad A.$$

Trditev 2.15 *Naj bo $s : X \to [0, \infty)$ enostavna funkcija. Potem je s predpisom*

$$\lambda(A) = \int_A s\, d\mu$$

definirana mera λ na $\mathcal{M}$.

Dokaz. Naj bo $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ standardna reprezentacija funkcije s in $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$. Potem je

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu\left(E_j \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(E_j \bigcap A_i\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} c_j\, \mu\left(E_j \cap A_i\right).$$

Ker lahko končno mnogo vrst z nenegativnimi členi seštejemo členoma, dobimo števno aditivnost

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu\left(E_j \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Ker je očitno $\lambda(\emptyset) = 0$, je torej λ mera na $\mathcal{M}$. $\square$

Pokažimo sedaj prvi temeljni izrek o konvergenci zaporedij merljivih funkcij.

Izrek 2.16 *(***Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci** (LMK)*) Naj bo $f_n : X \to [0, \infty]$ zaporedje merljivih funkcij, za katero velja $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$. Potem za merljivo funkcijo $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ velja*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Dokaz. Ker je $f_n \leq f_{n+1}$, je $\int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu$ za vsak n, zato obstaja limita $L = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ kot element intervala $[0, \infty]$. Ker je $f_n \leq f$, je $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ za vsak n, od koder sledi neenakost $L \leq \int f \, d\mu$.

Za dokaz nasprotne neenakosti moramo pokazati, da velja $L \geq \int s \, d\mu$ za poljubno enostavno funkcijo $s : X \to [0, \infty)$, za katero velja $s \leq f$. Izberimo poljubno število $c \in (0, 1)$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je množica

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} = (f_n - cs)^{-1}([0, \infty])$$

merljiva in zaradi monotonosti zaporedja funkcij velja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$. Pokažimo, da je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Naj bo $x \in X$. Če je $f(x) = 0$, potem je $x \in A_1$, če pa je $f(x) > 0$, potem zaradi $c < 1$ in $s \leq f$ velja $cs(x) < f(x)$, zato obstaja tak n, da je $cs(x) < f_n(x)$ in tako $x \in A_n$. Torej res velja $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Po trditvi 2.15 je s predpisom $\lambda(A) = \int_A s \, d\mu$ definirana mera λ na X. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ imamo neenakost

$$\int f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{A_n} s \, d\mu = c\lambda(A_n).$$

Če n pošljemo proti ∞, dobimo

$$L \geq c \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = c\,\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = c\,\lambda(X) = c \int s \, d\mu.$$

Ker je bil $c \in (0, 1)$ poljuben, mora veljati $L \geq \int s \, d\mu$, s čimer je dokaz končan. □

Iz izrekov 2.12 in 2.16 dobimo naslednjo posledico.

Posledica 2.17 *Za merljivo funkcijo $f : X \to [0, \infty]$ obstaja zaporedje $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enostavnih funkcij, ki po točkah konvergira proti f ter zanj velja*

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq f \quad \textit{in} \quad \int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu.$$

Izrek 2.18 *Naj bo $f_k : X \to [0, \infty]$ končno ali neskončno zaporedje merljivih funkcij in funkcija $f = \sum_k f_k : X \to [0, \infty]$ definirana s $f(x) = \sum_k f_k(x)$. Potem je f merljiva funkcija na X in velja*

$$\int f \, d\mu = \sum_k \int f_k \, d\mu.$$

Dokaz. Merljivost funkcije f sledi iz prejšnjih izrekov. Najprej pokažimo enakost v primeru dveh funkcij, torej

$$\int (f_1 + f_2) \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Po izreku 2.12 obstajata naraščajoči zaporedji $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih enostavnih funkcij, ki po točkah konvergirata zaporedoma proti f_1 in f_2. Potem zaporedje $\{s_n+t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enostavnih funkcij po točkah narašča proti f_1+f_2. Po LMK zato velja

$$\int (f_1+f_2)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (s_n+t_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int s_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int t_n\,d\mu = \int f_1\,d\mu + \int f_2\,d\mu,$$

kjer drugi enačaj velja po trditvi 2.14 (b).

S preprosto indukcijo se prepričamo, da enakost velja za končno zaporedje merljivih funkcij. V primeru neskončnega zaporedja merljivih funkcij definirajmo zaporedje delnih vsot $g_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, ki po točkah narašča proti f. Če še enkrat uporabimo LMK in (že dokazano) končno aditivnost, dobimo

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int f_k\,d\mu.$$

□

Posledica 2.19 *Naj bo μ mera štetja točk na merljivem prostoru $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Potem za (merljivo) funkcijo $f:\mathbb{N}\to[0,\infty]$ velja*

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Dokaz. Ker je $f=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\chi_{\{n\}}$, po izreku imamo

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f(n)\chi_{\{n\}}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

□

Posledica 2.20 *Naj bo $a_{m,n}\geq 0$ za vsa naravna števila m in n. Potem je*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

Dokaz. Definirajmo zaporedje funkcij $f_n:\mathbb{N}\to[0,\infty]$ s predpisom $f_n(m)=a_{m,n}$. Potem za funkcijo $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ velja $f(m)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$. Z uporabo prejšnje posledice in izreka dobimo

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

□

Trditev 2.21 *Za merljivo funkcijo $f : X \to [0, \infty]$ velja $\int f\, d\mu = 0$ natanko tedaj, ko je $f = 0$ skoraj povsod. V tem primeru velja*

$$\int (f + g)\, d\mu = \int g\, d\mu$$

za vsako merljivo funkcijo $g : X \to [0, \infty]$.

Dokaz. Če je f enostavna funkcija s standardno reprezentacijo $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$, potem je $\int f\, d\mu = 0$ natanko tedaj, ko za vsak j velja bodisi $c_j = 0$ bodisi $\mu(E_j) = 0$, kar pomeni, da je $f = 0$ skoraj povsod.

Obravnavajmo sedaj splošni primer. Naj bo $f = 0$ skoraj povsod. Če za enostavno funkcijo $s : X \to [0, \infty)$ velja $s \le f$, potem je $s = 0$ skoraj povsod, torej je $\int s\, d\mu = 0$ in zato $\int f\, d\mu = 0$. Za dokaz obratne implikacije definirajmo naraščajoče zaporedje merljivih množic $E_n = \{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$, tako da imamo $\{x \in X : f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Če je torej $\mu(\{x : f(x) > 0\}) > 0$, potem je $\mu(E_n) > 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tedaj iz $f \ge \frac{1}{n} \chi_{E_n}$ sledi $\int f\, d\mu \ge \frac{1}{n} \mu(E_n) > 0$. S tem je dokaz ekvivalentnosti končan.

Če je $g : X \to [0, \infty]$ poljubna merljiva funkcija, potem zaradi izreka 2.18 imamo

$$\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

Tako je trditev dokazana. □

Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci lahko malenkostno posplošimo.

Izrek 2.22 *Naj bo $f_n : X \to [0, \infty]$ zaporedje merljivih funkcij, $f : X \to [0, \infty]$ merljiva funkcija in naj zaporedje $\{f_n(x)\}$ narašča proti $f(x)$ skoraj za vse $x \in X$. Potem je*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu.$$

Dokaz. Naj bo $E = \{x \in X : f_n(x) \uparrow f(x)\}$. Ker je po predpostavki $\mu(E^c) = 0$, je $f \chi_{E^c} = 0$ skoraj povsod. Zato po trditvi 2.21 velja $\int f\, d\mu = \int f \chi_E\, d\mu$, saj imamo $f = f \chi_E + f \chi_{E^c}$. Podobno velja $\int f_n\, d\mu = \int f_n \chi_E\, d\mu$ za vsak n. Po izreku LMK tako velja

$$\int f\, d\mu = \int f \chi_E\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \chi_E\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu.$$

□

Naslednji primer nas prepriča, da v izreku LMK zahtevo o monotonosti zaporedja ne moremo nadomestiti s predpostavkama, da zaporedje funkcij konvergira po točkah in zaporedje integralov konvergira.

Zgled 2.23 *Naj bo μ mera štetja točk na merljivem prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ in naj bo $f_n = \chi_{\{n\}}$ zaporedje funkcij na $\mathbb{N}$. Potem je $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Ker je $\int f_n\, d\mu = \mu(\{n\}) = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je v izreku LMK ena stran enaka 1, druga pa 0.*

Izrek 2.24 *(***Fatoujev lema***) Če je $f_n : X \to [0, \infty]$ zaporedje merljivih funkcij, potem je*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Dokaz. Če označimo $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$, imamo $g_1 \le g_2 \le g_3 \le \cdots$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$. Ker je $f_n \ge g_n$, je $\int f_n\, d\mu \ge \int g_n\, d\mu$ in zato

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \ge \liminf_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu.$$

Z uporabo LMK sedaj dobimo

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \ge \int (\lim_{n\to\infty} g_n)\, d\mu = \int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu.$$

□

Posledica 2.25 *Naj bo $f_n : X \to [0, \infty]$ zaporedje merljivih funkcij, ki skoraj v vseh točkah konvergira proti merljivi funkciji $f : X \to [0, \infty]$. Potem velja*

$$\int f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Dokaz. Če imamo konvergenco v vseh točkah, potem je to posebni primer Fatoujeve leme. V splošnem primeru (kot v dokazu izreka 2.22) na ničelni množici popravimo funkcije f_n in f, s čimer ne vplivamo na vrednost integrala. □

Trditev 2.26 *Naj za merljivo funkcijo $f : X \to [0, \infty]$ velja $\int f\, d\mu < \infty$. Potem je $f(x) < \infty$ skoraj za vsak x, tj. mera množice $E = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ je enaka 0.*

Dokaz. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \le n\chi_E \le f$, zato je $\int f\, d\mu \ge \int n\chi_E\, d\mu = n\mu(E)$. Ker je $\int f\, d\mu < \infty$, od tod sledi, da je $\mu(E) = 0$. □

2.3 Integriranje kompleksnih funkcij

Tudi v tem razdelku fiksirajmo merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Merljiva funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ je **(Lebesgueovo) integrabilna**, kadar je $\int |f| \, d\mu < \infty$. Množico vseh integrabilnih funkcij na X označimo z $L^1(X, \mu)$ ali krajše z $L^1(\mu)$.

Lebesgueov integral funkcije $f = u + iv \in L^1(\mu)$, kjer sta u in v realni merljivi funkciji na X, je definiran kot

$$\int f \, d\mu = \int u^+ \, d\mu - \int u^- \, d\mu + i \int v^+ \, d\mu - i \int v^- \, d\mu.$$

Ker je $u^+ \leq |u| \leq |f|$, je $\int u^+ \leq \int |f| < \infty$. Na podoben način ugotovimo, da so integrali funkcij u^-, v^+ in v^- tudi končni. Torej je vrednost integrala kompleksno število. Ker je $u = \mathrm{Re}(f)$, je $\mathrm{Re}(\int f \, d\mu) = \int \mathrm{Re}(f) \, d\mu$ in podobno $\mathrm{Im}(\int f \, d\mu) = \int \mathrm{Im}(f) \, d\mu$.

V primeru merljive funkcije $f : X \to [-\infty, \infty]$ je integral definiran s predpisom

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

kjer zahtevamo, da vsaj eden od integralov končen. Tedaj je vrednost integrala element intervala $[-\infty, \infty]$. Če je poleg tega zaloga vrednosti funkcije f vsebovana v $\mathbb{R}$ in je f integrabilna, potem se ta definicija očitno ujema s prejšnjo.

Kot v primeru nenegativne funkcije definicijo integrala razširimo na integral po poljubni množici $A \in \mathcal{M}$ s predpisom

$$\int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu.$$

Trditev 2.27 *Množica $L^1(\mu)$ je kompleksen vektorski prostor in integral je linearen funkcional na njem, tj. za poljubni funkciji f, $g \in L^1(\mu)$ in poljubni kompleksni števili α, β velja*

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Dokaz. Naj bo f, $g \in L^1(\mu)$ in α, $\beta \in \mathbb{C}$. Funkcija $\alpha f + \beta g$ je merljiva po posledici 2.7. Zaradi trikotniške neenakost in izreka 2.18 pa velja tudi $\int |\alpha f + \beta g| \, d\mu \leq \int (|\alpha||f| + |\beta||g| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu + |\beta| \int |g| \, d\mu < \infty$, zato je $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ in $L^1(\mu)$ je vektorski prostor.

Dokaz linearnosti integrala je daljši, kot bi pričakovali. Najprej pokažimo aditivnost integrala, tj. $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$. To je dovolj dokazati za primer realnih funkcij f in g iz $L^1(\mu)$, saj splošni primer potem hitro sledi. Če označimo $h = f + g$, potem je $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, torej je $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$.

Po izreku 2.18 tako velja $\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$ oziroma $\int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-$, s čimer je dokaz aditivnosti končan.

Dokažimo še homogenost integrala, tj. $\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$. To hitro vidimo, če je α nenegativno realno število. Veljavnost enakosti v primeru $\alpha = -1$ sledi iz

$$\int f\, d\mu + \int (-f)\, d\mu = \int (f + (-f))\, d\mu = 0,$$

kjer smo uporabili že dokazano aditivnost. Če je $\alpha = i$ in $f = u + iv$, je

$$\int (if) = \int (iu - v) = \int (-v) + i \int u = -\int v + i \int u = i \left(\int u + i \int v \right) = i \int f.$$

S pomočjo teh posebnih primerov zlahka pokažemo enakost v splošnem primeru. □

Trditev 2.28 *Za funkcijo $f \in L^1(\mu)$ velja neenakost*

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Dokaz. To trivialno velja v primeru, ko je $\int f = 0$. Če je f realna funkcija, potem je

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

Naj bo sedaj f kompleksna funkcija in $\int f \neq 0$. Naj bo α tisto kompleksno število z absolutno vrednostjo 1, za katero je $|\int f| = \alpha \int f = \int \alpha f$. Zadnja enakost velja zaradi homogenosti integrala. Ker je torej $\int \alpha f$ realno število, je

$$\left| \int f \right| = \mathrm{Re} \int \alpha f = \int \mathrm{Re}(\alpha f) \leq \int |\mathrm{Re}(\alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f|.$$

□

Izrek 2.29 *(***Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci** (LDK)*) Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij na X, ki po točkah konvergira proti kompleksni merljivi funkciji f. Če obstaja taka funkcija $g \in L^1(\mu)$, da je $|f_n| \leq g$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem je $f \in L^1(\mu)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0 \quad \textit{in} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Dokaz. Iz $|f_n| \leq g$ sledi $|f| \leq g$, zato je $f \in L^1(\mu)$. Ker je $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$, je $h_n = 2g - |f_n - f|$ nenegativna merljiva funkcija. Če za zaporedje $\{h_n\}$ uporabimo Fatoujev lema, dobimo

$$\int 2g = \int \liminf_{n\to\infty} h_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int h_n = \int 2g + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int |f_n - f| \right),$$

od koder sledi neenakost

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| = - \liminf_{n\to\infty} \left(- \int |f_n - f| \right) \leq 0.$$

Ker po drugi strani velja

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \geq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f| \geq 0,$$

od tod sklepamo, da limita $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|$ obstaja in je enaka 0.

Zadnja enakost v izreku potem takoj sledi iz neenakosti

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu.$$

□

Trditev 2.30 *Za funkciji f in g iz $L^1(\mu)$ je ekvivalentno trditi:*

(a) $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$ *za vsak* $A \in \mathcal{M}$*;*

(b) $\int |f - g| \, d\mu = 0$*;*

(c) $f = g$ *skoraj povsod.*

Dokaz. Ker je (c) ekvivalentno s trditvijo, da je $|f-g| = 0$ skoraj povsod, ekvivalenca med (b) in (c) sledi iz trditve 2.21.

Če velja (b), potem za vsak $A \in \mathcal{M}$ velja

$$\left| \int_A f \, d\mu - \int_A g \, d\mu \right| = \left| \int (f - g)\chi_A \, d\mu \right| \leq \int |f - g| \, d\mu = 0,$$

torej velja (a).

Denimo sedaj, da (c) ne velja. Če je $f - g = u + iv$, kjer sta u in v realni merljivi funkciji, potem je vsaj ena od funkcij u^+, u^-, v^+ in v^- različna od 0 na množici s pozitivno mero. Če ima npr. množica $A = \{x : u^+(x) > 0\}$ pozitivno mero, potem je $\mathrm{Re}(\int_A f \, d\mu - \int_A g \, d\mu) = \int_A u^+ > 0$, saj je $u^- = 0$ na A. Torej (a) ne velja.

Podobno postopamo v drugih treh primerih. Tako je trditev dokazana. □

Iz zadnje trditve sledi, da se vrednost integrala funkcije iz $L^1(\mu)$ ne spremeni, če funkcijo spremenimo na ničelni množici. To pa pomeni, da je definicija integrala smiselna za funkcije, ki so definirane samo skoraj povsod na množici X. Če je taka funkcija definirana na množici $E \in \mathcal{M}$, potem jo lahko razširimo na E^c z vrednostjo 0 (ali kako drugo vrednostjo), kadar vseeno želimo imeti povsod definirano funkcijo. Če je mera polna, potem lahko celo v vsaki točki množice E^c izberemo drugo vrednost, ne da bi pri tem izgubili merljivost funkcije.

Skladno s tem ponovno definiramo prostor $L^1(\mu)$ kot množico vseh ekvivalenčnih razredov skoraj povsod definiranih integrabilnih funkcij na X, kjer sta funkciji f in g ekvivalentni, kadar je $f = g$ skoraj povsod. Tako definirana množica je še vedno kompleksni vektorski prostor, v katerem seštevamo in množimo s skalarji po točkah skoraj povsod. Čeprav so elementi prostora sedaj ekvivalenčni razredi skoraj povsod enakih funkcij, zapis $f \in L^1(\mu)$ še vedno pomeni, da je f skoraj povsod definirana integrabilna funkcij na X. To je splošno sprejet dogovor, ki redko povzroči zmedo.

Nova definicija prostora $L^1(\mu)$ ima še eno prednost. V njem je s predpisom

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

definirana norma. Brez težav namreč preverimo trikotniško neenakost $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ in homogenost norme $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$, medtem ko je $\|f\|_1 = 0$ natanko takrat, ko je $f = 0$ s.p., torej f pripada ekvivalenčnemu razredu ničelne funkcije. Tako je $L^1(\mu)$ normiran prostor, za katerega bomo kasneje pokazali, da je celo Banachov. Potemtakem izrek LDK pravi, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $L^1(\mu)$ po normi konvergira proti $f \in L^1(\mu)$, če po točkah konvergira proti f in je dominirano s funkcijo iz $L^1(\mu)$.

Izrek 2.31 *Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij, ki so definirane skoraj povsod na X. Če je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty,$$

potem vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

absolutno konvergira skoraj za vse $x \in X$, funkcija f je integrabilna in zanjo velja

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Dokaz. Če je funkcija f_n definirana na množici E_n, potem je $\mu(E_n^c) = 0$. Naj bo $E = \cap_n E_n$. Potem je $\mu(E^c) = \mu(\cup_n E_n^c) \leq \sum_n \mu(E_n^c) = 0$. Torej je funkcija g, definirana za $x \in E$ s predpisom $g(x) = \sum_n |f_n(x)|$, definirana skoraj povsod. Ker je po predpostavki

$$\int g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu < \infty,$$

je $g \in L^1(\mu)$. Zato je po trditvi 2.26 $g(x) < \infty$ skoraj za vsak x, torej za množico $A = \{x \in E : g(x) < \infty\}$ velja $\mu(E \setminus A) = 0$. Ker je $\mu(E^c) = 0$, je torej $\mu(A^c) = 0$. Ker za vsak $x \in A$ vrsta $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutno konvergira, imamo torej konvergenco skoraj za vse $x \in X$. Ker je $\int |f|\, d\mu \leq \int g\, d\mu < \infty$, je funkcija f je integrabilna. Če je $g_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, potem je $|g_n| \leq g$ s.p. in $g_n(x) \to f(x)$ za vsak $x \in A$. Zato je po LDK

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

□

Za konec razdelka se posvetimo posebnemu primeru Lebesgueove mere m na $\mathbb{R}$. Poglejmo si, v kakšni zvezi sta tedaj Lebesgueov in Riemannov integral. Najprej ponovimo definicijo Riemannovega integrala.

Naj bo $f : [a, b] :\to \mathbb{R}$ omejena funkcija. **Delitev** intervala $[a, b]$ je končna množica točk $D = \{x_k\}_{k=0}^n$, za katero velja $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. **Zgornja (Darbouxova) vsota funkcije f glede na delitev D** je definirana kot

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

kjer je M_k supremum funkcije f na $[x_{k-1}, x_k]$. Podobno definiramo **spodnjo (Darbouxovo) vsoto glede na delitev D** kot

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

kjer je m_k infimum funkcije f na $[x_{k-1}, x_k]$. Sedaj definiramo

$$S(f) = \inf_D S(f, D)\ ,\quad s(f) = \sup_D s(f, D),$$

kjer tečeta infimum in supremum po vseh delitvah D. Lahko je pokazati, da je $S(f) \geq s(f)$. Kadar je $S(f) = s(f)$, je ta vrednost **Riemannov integral** $\int_a^b f(x)dx$, za funkcijo f pa pravimo, da je **Riemannovo integrabilna**.

Izrek 2.32 *Naj bo $f : [a, b] :\to \mathbb{R}$ omejena funkcija.*

(a) Če je f Riemannovo integrabilna, potem je f Lebesgueovo integrabilna in

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\, dm.$$

(b) Funkcija f je Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je zvezna skoraj povsod, tj. množica $\{x \in [a, b] : f \text{ ni zvezna v } x\}$ ima Lebesgueovo mero enako 0.

Dokaz. (a) Naj bo f Riemannovo integrabilna. Za vsako delitev D definirajmo

$$G_D = \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_{(x_k, x_{k-1}]} \text{ in } g_D = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{(x_k, x_{k-1}]}.$$

Potem je $S(f, D) = \int G_D\, dm$ in $s(f, D) = \int g_D\, dm$. Ker je f Riemannovo integrabilna, obstaja tako zaporedje delitev $\{D_n\}$, da je zaporedje funkcij $\{G_{D_n}\}$ padajoče, zaporedje funkcij $\{g_{D_n}\}$ naraščajoče in zaporedji $\{S(f, D_n)\}$ in $\{s(f, D_n)\}$ konvergirata proti $\int_a^b f(x)dx$. Naj bo $G = \lim G_{D_n}$ in $g = \lim g_{D_n}$. Potem po LDK velja $\int G dm = \int g dm = \int_a^b f(x)dx$, torej je $\int (G - g)dm = 0$. Ker je $g \le f \le G$, od tod sklepamo, da je $G = g = f$ skoraj povsod. Ker je funkcija G limita enostavnih funkcij, je merljiva. Ker je m polna mera, je merljiva tudi funkcija f in $\int_{[a,b]} f\, dm = \int_{[a,b]} G\, dm = \int_a^b f(x)dx$.

Dokaz točke (b) izpustimo. □

Po zadnjem izreku je Lebesgueov integral razširitev (pravega) Riemannovega integrala na $[a, b]$. Obstajajo preproste Lebesgueovo integrabilne funkcije, ki niso Riemannovo integrabilne. Za primer vzemimo karakteristično funkcijo racionalnih števil na intervalu $[0, 1]$, ki ni nikjer zvezna in torej ni Riemannovo integrabilna. Torej Lebesgueov integral obstaja za večji razred funkcij, kar je ena od njegovih prednosti pred Riemannovim integralom. Druga pomembna prednost pa je, da imamo pri Lebesgueovem integralu na razpolago močnejša konvergenčna izreka (LMK in LDK), medtem ko se pri Riemannovem integralu običajno utemelji zamenjavo limite in integrala le v primeru, ko zaporedje funkcij na $[a, b]$ enakomerno konvergira.

Za Lebesgueov integral lahko smatramo tudi tiste posplošene Riemannove integrale, ki so absolutno konvergentni. Podrobneje si oglejmo primer omejene realne funkcije f na $[a, \infty)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Posplošeni Riemannov integral funkcije f obstaja, če je f Riemannovo integrabilna na $[a, b]$ za vsak $b > a$ in obstaja limita $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$, ki jo proglasimo za vrednost Riemannovega integrala $\int_a^\infty f(x)dx$.

Taka funkcija ni nujno Lebesgueovo integrabilna, kot nas prepriča primer funkcije $f = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\chi_{[n,n+1)}$, saj je

$$\int_{[1,\infty)} f^+ dm = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \infty$$

in

$$\int_{[1,\infty)} f^- dm = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = \infty,$$

toda posplošeni Riemannov integral je

$$\int_1^\infty f(x)dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2.$$

Če pa je taka funkcija Lebesgueovo integrabilna, potem se oba integrala ujemata, saj po LDK velja $\int_{[a,\infty)} f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} f\chi_{[a,n]}\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$.

Kaj je bistvena razlika med Lebesgueovim in Riemannovim integralom? Vzemimo omejeno nenegativno merljivo funkcijo f na intevalu $[a, b]$. Za izračun Riemannovega integrala razdelimo domeno $[a, b]$ na podintervale in aproksimiramo f od spodaj in od zgoraj s funkcijami, ki so konstantne na vsakem od podintervalov. Za izračun Lebesgueovega integrala pa izberemo zaporedje enostavnih funkcij, ki narašča proti f, torej razdelimo kodomeno $[0,\infty)$ na podintervale I_k in aproksimiramo f s konstanto na vsaki od praslik $f^{-1}(I_k)$. Ker so te praslike lahko zelo komplicirane, smo morali na začetku razviti bolj zapleteno teorijo mere.

2.4 Konvergence zaporedij merljivih funkcij

Tudi v tem razdelku fiksirajmo merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Naj bo $\{f_n\}$ zaporedje merljivih kompleksnih funkcij na X in naj bo f merljiva kompleksna funkcija na X. Potem za $x \in X$ velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ natanko tedaj, ko za vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da za vse $k \geq n$ velja $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$. Od tod izpeljemo enakost

$$\left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\} = \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Ker je množica $\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\} = |f_k - f|^{-1}([0, \frac{1}{m}))$ merljiva, od tod sklepamo, da je množica $\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$ merljiva.

Zaporedje $\{f_n\}$ **skoraj povsod konvergira** proti f, kadar ima komplement množice $\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$ mero 0.

Zaporedje $\{f_n\}$ **skoraj enakomerno konvergira** proti f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka merljiva množica E, da je $\mu(E^c) < \epsilon$ in na E zaporedje $\{f_n\}$ enakomerno konvergira proti f.

Trditev 2.33 *Če zaporedje $\{f_n\}$ skoraj enakomerno konvergira proti f, potem $\{f_n\}$ skoraj povsod konvergira proti f.*

Dokaz. Za vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja taka merljiva množica E_m, da je $\mu(E_m^c) < \frac{1}{m}$ in na E_m zaporedje $\{f_n\}$ enakomerno konvergira proti f. Če postavimo $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, potem je $\mu(E^c) = \mu(\cap_{m=1}^{\infty} E_m^c) = 0$ in $\{f_n\}$ konvergira proti f na E, torej skoraj povsod. □

Če je mera μ končna ($\mu(X) < \infty$), potem velja tudi obratno.

Izrek 2.34 (**Izrek Jegorova**) *Če je $\mu(X) < \infty$ in če zaporedje $\{f_n\}$ skoraj povsod konvergira proti f, potem $\{f_n\}$ skoraj enakomerno konvergira proti f.*

Dokaz. Če označimo $A_{n,m} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}$, potem imamo

$$\left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

Ker $\{f_n\}$ skoraj povsod konvergira proti f, tako velja

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m}\right) = \mu(X).$$

Od tod sledi, da je $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m}\right) = \mu(X)$ za vsak m. Ker je $A_{n,m} \subseteq A_{n+1,m}$, je $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,m}) = \mu(X)$ oziroma $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,m}^c) = 0$ za vsak m. To pomeni, da pri danem $\epsilon > 0$ in $m \in \mathbb{N}$ obstaja tak n_m, da za vse $n \geq n_m$ velja $\mu(A_{n,m}^c) < \frac{\epsilon}{2^m}$. Naj bo $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n_m,m}$. Potem je

$$\mu(A^c) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{n_m,m}^c) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon.$$

Ker za vsak $x \in A$, za vsak $m \in \mathbb{N}$ in za vsak $k \geq n_m$ velja $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$, zaporedje $\{f_n\}$ konvergira proti f enakomerno na množici A. S tem je dokaz končan. □

S primerom pokažimo, da v izreku Jegorova ne moremo izpustiti predpostavke o končnosti mere.

Zgled 2.35 *Naj bo μ mera štetja točk na merljivem prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Ker na tem merljivem prostoru iz $\mu(A) < 1$ sledi $A = \emptyset$, konvergenca skoraj povsod pomeni konvergenco povsod, skoraj enakomerna konvergenca pa enakomerno konvergenco. Zaporedje funkcij $f_n = \chi_{\{n,n+1,n+2,\ldots\}}$ konvergira po točkah proti ničelni funkciji, saj ima v točki $k \in \mathbb{N}$ zaporedje $\{f_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ najprej k enic in potem same ničle. Od tod je tudi jasno, da zaporedje ne konvergira enakomerno.*

Spoznajmo še eno konvergenco zaporedij merljivih funkcij, ki ima pomembno vlogo v verjetnostnem računu, kjer se imenuje verjetnostna konvergenca. Zaporedje $\{f_n\}$ **po meri konvergira** proti f, kadar za vsak $\epsilon > 0$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Trditev 2.36 *(a) Če zaporedje $\{f_n\}$ po meri konvergira hkrati proti funkcijama f in g, potem je $f = g$ skoraj povsod.*

(b) Če zaporedje $\{f_n\}$ skoraj enakomerno konvergira proti funkciji f, potem tudi po meri konvergira proti f.

(c) Če je μ končna mera in zaporedje $\{f_n\}$ skoraj povsod konvergira proti f, potem $\{f_n\}$ po meri konvergira proti f.

(d) Če zaporedje $\{f_n\}$ iz normiranega prostora $L^1(\mu)$ po normi konvergira proti $f \in L^1(\mu)$, potem $\{f_n\}$ po meri konvergira proti f.

Dokaz. (a) Ker za vsak $\epsilon > 0$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja inkluzija

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq 2\epsilon\} \subseteq \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon\},$$

je

$$\mu(\{x : |f(x)-g(x)| \geq 2\epsilon\}) \leq \mu(\{x : |f(x)-f_n(x)| \geq \epsilon\})+\mu(\{x : |f_n(x)-g(x)| \geq \epsilon\}),$$

od koder sledi, da je $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq 2\epsilon\}) = 0$ za vsak $\epsilon > 0$. Toda $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \cup_{m=1}^{\infty}\{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{m}\}$, zato je $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

(b) Za vsak $\delta > 0$ obstaja taka merljiva množica E, da je $\mu(E^c) < \delta$ in na E zaporedje $\{f_n\}$ enakomerno konvergira proti f, torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako naravno število n_0, da je $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ za vse $n \geq n_0$ in vse $x \in E$. To pomeni, da za vse $n \geq n_0$ velja $\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subseteq E^c$ in zato $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu(E^c) < \delta$. S tem smo dokazali konvergenco po meri.

(c) Trditev takoj sledi iz izreka Jegorova in (b).

(d) Uporabili bomo neenakost Markova

$$\int g \, d\mu \geq \epsilon\mu(\{x \in X : g(x) \geq \epsilon\}),$$

ki velja za vsako nenegativno merljivo funkcijo g na X in vsak $\epsilon > 0$. Neenakost se pokaže s preprosto oceno

$$\int g \, d\mu \geq \int_{\{x:g(x)\geq\epsilon\}} g \, d\mu \geq \epsilon\mu(\{x \in X : g(x) \geq \epsilon\}).$$

Če sedaj označimo $A_{n,\epsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ in neenakost Markova uporabimo za funkcijo $g = |f_n - f|$, dobimo

$$\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f|\, d\mu \geq \epsilon\mu(A_{n,\epsilon}).$$

Ker $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ po predpostavki, je torej $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,\epsilon}) = 0$, kar smo želeli pokazati. □

Razdelek in poglavje zaključimo s kratkim slovarjem med pojmi iz teorije mere in pojmi iz verjetnostnega računa, kjer je teorija mere pomemben pripomoček.

TEORIJA MERE	VERJETNOSTNI RAČUN
merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\mu(X) = 1$	verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $P(\Omega) = 1$
merljiva množica	dogodek
merljiva realna funkcija f na X	slučajna spremenljivka X
integral $\int f\, d\mu$	matematično upanje $E(X) = \int X dP$
skoraj povsod, s.p.	skoraj gotovo, s.g.
karakteristična funkcija χ_E	indikatorska funkcija 1_E
konvergenca skoraj povsod	konvergenca skoraj gotovo
konvergenca po meri	verjetnostna konvergenca
$f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\}$	$(X > a) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\}$