Poglavje 4

L^p-PROSTORI

4.1 Konveksne funkcije in neenakosti

Funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **konveksna**, kadar za vsak x, $y \in (a, b)$ in vsak $\lambda \in [0, 1]$ velja

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

Tukaj je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Lahko je pokazati, da je ekvivalentno zahtevati, da velja

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

za vse $a < s < t < u < b$. Nariši sliko!

Trditev 4.1 *(a) Če je funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna, potem je zvezna.*

(b) Če je funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva, potem je konveksna natanko tedaj, kadar je drugi odvod φ'' nenegativna funkcija.

Izrek 4.2 *(**Jensenova neenakost**) Naj za pozitivno mero μ na X velja $\mu(X) = 1$. Naj bo $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, kjer je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Če je zaloga vrednosti funkcije $f \in L^1(\mu)$ vsebovana v (a, b), potem velja neenakost*

$$\varphi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f \, d\mu.$$

Dokaz. Naj bo $t = \int f \, d\mu$. Ker je realna funkcija g na X, definirana z $g(x) = f(x) - a$, strogo pozitivna, je $0 < \int g \, d\mu = \int f \, d\mu - a$ in zato je $a < t$. Podobno s pomočjo strogo pozitivne funkcije $h(x) = b - f(x)$ vidimo, da je $t < b$. Definirajmo število $\beta = \sup_{s \in (a,t)} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$, ki geometrijsko pomeni levi odvod funkcije φ v točki $t \in (a, b)$. Ker je $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ za vse $s \in (a, t)$ in $u \in (t, b)$, je $\beta \in \mathbb{R}$ in velja

$$\beta \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

za vse $u \in (t,b)$. Od tod dobimo neenakost

$$\varphi(u) \geq \varphi(t) + \beta(u-t), \tag{4.1}$$

ki velja za vse $u \in [t,b)$. Po drugi strani za vsak $s \in (a,t)$ velja neenakost $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta$ oziroma

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t).$$

Če to združimo z (4.1), dobimo neenakost

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t),$$

ki velja za vse $s \in (a,b)$. Geometrijsko ta neenakost pomeni, da "leva tangenta"na graf funkcije φ v točki t leži pod grafom funkcije.

Zaradi zadnje neenakosti za vsak $x \in X$ velja neenakost

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta(f(x)-t).$$

Če jo integriramo, dobimo

$$\int \varphi \circ f \, d\mu \geq \varphi(t) + \beta\left(\int f \, d\mu - t\right) = \varphi\left(\int f \, d\mu\right),$$

kjer smo dvakrat upoštevali, da je $\mu(X) = 1$. S tem je izrek dokazan. □

Oglejmo si posebni primer Jensenove neenakosti, ko je X končna množica. Naj bo $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $\alpha_j = \mu(\{p_j\}) > 0$ in $x_j = f(p_j)$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. Ker mora veljati $\mu(X) = 1$, je $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. V tem primeru se Jensenova neenakost glasi:

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(x_j).$$

Zapišimo to neenakost v primeru eksponentne funkcije $\varphi(x) = e^x$, ki je konveksna na $\mathbb{R}$, saj ima vse odvode pozitivne. Če postavimo $y_j = e^{x_j}$, potem dobimo

$$y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n, \tag{4.2}$$

ki velja za poljubna pozitivna števila y_1, …, y_n. V posebnem primeru $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ prepoznamo neenakost med geometrijsko in aritmetično sredino pozitivnih števil y_1, …, y_n:

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

Sedaj v (4.2) postavimo $n = 2$, $y_1 = x^p$, $y_2 = y^q$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$ in $\alpha_2 = \frac{1}{q}$. Potem dobimo **Youngovo neenakost**

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

ki velja za poljubni nenegativni realni števili x in y, kadar realni števili p in q iz $(1,\infty)$ izpolnjujeta pogoj $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Takemu paru števil p in q pravimo **konjugirana eksponenta**. Pomemben primer konjugiranih eksponentov je $p=q=2$.

Izrek 4.3 *Naj bo μ mera na $(X,\mathcal{M})$ in $f,\, g : X \to [0,\infty]$ merljivi funkciji. Potem za konjugirana eksponenta p in q velja neenakost*

$$\int fg\,d\mu \le \left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int g^q\,d\mu\right)^{1/q}, \tag{4.3}$$

za poljubno število $p \ge 1$ pa velja neenakost

$$\left(\int (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p\,d\mu\right)^{1/p}. \tag{4.4}$$

Neenakost (4.3) se imenuje **Hölderjeva neenakost**, v posebnem primeru $p=q=2$ **Cauchy-Schwarzova neenakost**. Neenakost (4.4) se imenuje **neeenakost Minkowskega**.

Dokaz. Označimo $A=\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}$ in $B=\left(\int g^q\,d\mu\right)^{1/q}$. Če je $A=0$ (ali $B=0$), potem je $f=0$ (ali $g=0$) skoraj povsod in tedaj neenakost (4.3) velja. Zato smemo privzeti, da je $A>0$ in $B>0$. Če je $A=\infty$ ali $B=\infty$, je (4.3) tudi resnična, saj je desna stran neenakosti enaka ∞. Tako moramo obravnavati le primer, ko A in B pripadata intervalu $(0,\infty)$.

Definirajmo funkciji $F=f/A$ in $G=g/B$. Potem je

$$\int F^p\,d\mu = \int G^q\,d\mu = 1.$$

Zaradi Youngove neenakosti imamo

$$FG \le \frac{F^p}{p}+\frac{G^q}{q},$$

od koder z integriranjem dobimo

$$\int FG\,d\mu \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

oziroma

$$\int fg\,d\mu \le AB,$$

kar je neenakost (4.3).

V dokazu neenakosti (4.4) smemo privzeti, da je

$$p>1, \int f^p\,d\mu<\infty, \int g^p\,d\mu<\infty \text{ in } \int (f+g)^p\,d\mu>0.$$

Tedaj je zadnji integral končen, saj zaradi $(f+g)^p \leq (2\max\{f,g\})^p = 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p(f^p + g^p)$ velja ocena

$$\int (f+g)^p \, d\mu \leq 2^p \left(\int f^p \, d\mu + \int g^p \, d\mu \right) < \infty.$$

Integrand na levi strani neenakosti (4.4) zapišimo kot vsoto $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$ in za oba produkta v vsoti uporabimo neenakost (4.3):

$$\int (f+g)^p \, d\mu = \int f(f+g)^{p-1} \, d\mu + \int g(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq$$

$$\leq \left(\int f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q} + \left(\int g^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/q} \left[\left(\int f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu \right)^{1/p} \right],$$

kjer smo upoštevali enakost $q(p-1) = p$. Neenakost (4.4) sedaj dobimo po krajšanju s pozitivnim številom $\left(\int (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/q}$. □

4.2 L^p-prostori

Naj bo μ mera na $(X, \mathcal{M})$ in $p \in [1, \infty)$. **L^p-norma** (ali **p-ta norma**) kompleksne merljive funkcije f na X je definirana s predpisom

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Množico vseh kompleksnih merljivih funkcij f na X, za katere je $\|f\|_p < \infty$, označimo z $L^p(X, \mu)$ ali z $L^p(\mu)$. Če je μ mera štetja točk na X, potem običajno uporabljamo oznako $l^p(X)$, če pa je še $X = \mathbb{N}$, izpustimo tudi X in pišemo samo l^p. Ker v tem primeru kompleksno funkcijo f na $\mathbb{N}$ (kot običajno) identificiramo z zaporedjem $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$, je torej

$$l^p = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_n \in \mathbb{C}, \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Te definicije razširimo še na $p = \infty$. Za merljivo funkcijo $f : X \to [0, \infty]$ definirajmo množico

$$S_f = \{t \in [0, \infty) : \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) = 0\},$$

ki je lahko prazna množica. Vzemimo tako funkcijo f, da je $S_f \neq \emptyset$. Ker iz $t \in S_f$ očitno sledi $[t, \infty) \subseteq S_f$, je S_f poltrak. Dokažimo, da za število $t_0 = \inf S_f$ velja $t_0 \in S_f$, torej $S_f = [t_0, \infty)$. Ker je $t_0 + \frac{1}{n} \in S_f$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je množica

$$\{x \in X : f(x) > t_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) > t_0 + \frac{1}{n}\right\}$$

števna unija ničelnih množic, zato je njena mera tudi enaka 0, torej je $t_0 \in S_f$. To pomeni, da je $f(x) \leq t_0$ skoraj za vse x in da je t_0 najmanjše nenegativno število s to lastnostjo. Pravimo mu **bistveni supremum** funkcije f in ga označimo z $\operatorname{ess\,sup}(f)$. Kadar je $S_f = \emptyset$, funkcija f ni bistveno omejena, zato postavimo $\operatorname{ess\,sup}(f) = \infty$.

Sedaj za kompleksno merljivo funkcijo f na X definiramo **L^∞-normo** kot $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}(|f|)$. Množico vseh kompleksnih merljivih funkcij f na X, za katere je $\|f\|_\infty < \infty$, označimo z $L^\infty(X, \mu)$ ali krajše z $L^\infty(\mu)$. Če je μ mera štetja točk na X, potem uporabljamo oznako $l^\infty(X)$, če pa je še $X = \mathbb{N}$, izpustimo tudi X in pišemo samo l^∞. Ker v tem primeru kompleksno funkcijo f na $\mathbb{N}$ identificiramo z zaporedjem $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$, je

$$l^\infty = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_n \in \mathbb{C}, \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}.$$

Izrek 4.4 *Naj bo μ mera na $(X, \mathcal{M})$ in $1 \leq p \leq \infty$. Potem je $L^p(\mu)$ vektorski prostor funkcij. Za $f, g \in L^p(\mu)$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ veljata relaciji*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \textit{in} \quad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p.$$

Dokaz. Očitno iz obeh relacij sledi, da je $L^p(\mu)$ vektorski prostor funkcij. Če je $p < \infty$, potem enakost $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ očitno velja, trikotniška neenakost pa je enostavna posledica neenakosti Minkowskega za funkciji $|f|$ in $|g|$:

$$\|f + g\|_p = \left(\int |f + g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int (|f| + |g|)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Obravnavajmo še primer $p = \infty$. Ker enakost $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ očitno velja za $\lambda = 0$, privzemimo, da je $\lambda \neq 0$. Ker je $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ skoraj za vsak $x \in X$, je $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$ skoraj za vsak $x \in X$ in zato je $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$. Z uporabo te neenakosti dobimo še $\|f\|_\infty = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty$, torej res imamo $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$. Ker je $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ skoraj za vsak $x \in X$, je $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. $\square$

Kot v primeru $p = 1$ iz $\|f\|_p = 0$ v splošnem ne sledi, da je $f = 0$, temveč samo, da je $f = 0$ skoraj povsod. Ker po zadnjem izreku L^p-norma izpolnjuje preostale zahteve za normo, ponovno definiramo prostor $L^p(\mu)$ kot množico vseh ekvivalenčnih razredov skoraj povsod definiranih integrabilnih funkcij na X, kjer sta funkciji f in g ekvivalentni, kadar je $f = g$ skoraj povsod. Tako definirana množica je sedaj kompleksni normiran prostor, v katerem seštevamo in množimo s skalarji po točkah skoraj povsod. Po splošno sprejetem dogovoru zanj uporabljamo isto oznako $L^p(X, \mu)$ ali $L^p(\mu)$. Pokažimo sedaj, da je ta normirani prostor tudi poln.

Izrek 4.5 *Za vsak $p \in [1, \infty]$ je $L^p(\mu)$ Banachov prostor.*

Dokaz. Dokaz je bolj zanimiv in poučen v primeru $p < \infty$, zato obravnavajmo samo ta primer. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $L^p(\mu)$, torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da za vse $m, n \geq n_0$ velja $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$. Pri $\epsilon = \frac{1}{2}$ tako najdemo indeks n_1, da za vse $m, n \geq n_1$ velja $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$. Pri $\epsilon = \frac{1}{2^2}$ lahko najdemo tak indeks $n_2 > n_1$, da za vse $m, n \geq n_2$ velja $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^2}$. S tem lahko nadaljujemo: pri $\epsilon = \frac{1}{2^3}$ najdemo tak indeks $n_3 > n_2$, da za vse $m, n \geq n_3$ velja $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^3}$ itd. Tako dobimo podzaporedje $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ zaporedja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, za katero velja $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}$ za vse $j \in \mathbb{N}$.

Naj bo $g_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ $(k \in \mathbb{N})$ in $g = \sum_{j=1}^\infty |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$. Zaradi trikotniške neenakosti imamo

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} < 1.$$

Po Fatoujevi lemi tako velja

$$\int g^p \, d\mu = \int \lim_{k\to\infty} g_k^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int g_k^p \, d\mu \leq 1,$$

torej $\|g\|_p \leq 1$. Od tod zaključimo, da je $g(x) < \infty$ skoraj za vsak $x \in X$ in zato vrsta

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^\infty (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

absolutno konvergira skoraj za vsak $x \in X$. Če njeno vsoto označimo z $f(x)$, imamo s tem določeno skoraj povsod definirano funkcijo f na X oziroma ekvivalenčni razred, ki je naraven kandidat za limito danega Cauchyjevega zaporedja, saj je $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ skoraj za vsak x. Delna vsota zgornje absolutno konvergentne vrste je namreč enaka

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) = f_{n_k}(x).$$

Dokaz bo končan, če se prepričamo, da je $f \in L^p(\mu)$ in da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ po L^p-normi konvergira proti f. Izberimo $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak indeks n_0, da za vse $m, n \geq n_0$ velja $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$. Po Fatoujevi lemi tako za vsak $n \geq n_0$ velja

$$\int |f - f_n|^p \, d\mu = \int (\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_n|)^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \leq \epsilon^p.$$

Od tod najprej zaključimo, da $f - f_n \in L^p(\mu)$ in zato $f = f_n + (f - f_n) \in L^p(\mu)$. Hkrati iz zgornje ocene sledi, da je $\|f - f_n\|_p \leq \epsilon$ za vse $n \geq n_0$, torej zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ po L^p-normi konvergira proti f. □

Izrek 4.6 *Za vsak $p \in [1, \infty]$ je množica $\mathcal{S}$ vseh enostavnih funkcij $s \in L^p(\mu)$ gost podprostor prostora $L^p(\mu)$.*

Dokaz. Zlahka uvidimo, da je $\mathcal{S}$ podprostor prostora $L^p(\mu)$. Za dokaz gostosti vzemimo poljuben $f \in L^p(\mu)$. Po izreku 2.12 (b) obstaja zaporedje $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enostavnih funkcij, ki po točkah konvergira proti f in zanj velja $0 \leq |s_1| \leq |s_2| \leq |s_3| \leq \ldots \leq |f|$. V primeru $p = \infty$ lahko dodatno zahtevamo še, da je konvergenca enakomerna na X, saj smemo tedaj za f privzeti, da je omejena funkcija (vsak ekvivalenčni razred v $L^\infty(\mu)$ vsebuje omejeno funkcijo). To pomeni, da zaporedje $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcij iz $L^\infty(\mu)$ po L^∞-normi konvergira proti f, s čimer je dokaz v tem primeru končan.

Vzemimo sedaj, da je $1 \leq p < \infty$. Ker je $|s_n| \leq |f|$, je $s_n \in \mathcal{S}$ za vsak n. Ker je $|f - s_n|^p \leq (|f| + |s_n|)^p \leq (2|f|)^p \in L^1(\mu)$, po izreku LDK velja

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f - s_n|^p \, d\mu = 0,$$

torej je $\mathcal{S}$ gost podprostor prostora $L^p(\mu)$. □

V primeru Lebesgueove mere na $\mathbb{R}$ se pojavi analogno vprašanje, ali je gost tudi podprostor vseh zveznih funkcij v $L^p(\mathbb{R})$. Za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiramo njen **nosilec** $\operatorname{supp}(f)$ kot zaprtje množice $(f^{-1}(\{0\}))^c = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$. Kadar je $\operatorname{supp}(f)$ kompaktna množica v $\mathbb{R}$, pravimo, da ima f **kompaktni nosilec**. S $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ označimo množico vseh zveznih kompleksnih funkcij na $\mathbb{R}$, ki imajo kompaktni nosilec. Ker velja $\operatorname{supp}(f + g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ za poljubni funkciji f in g na $\mathbb{R}$, je $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ vektorski prostor funkcij.

Naj bo μ Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathbb{R}$ in $1 \leq p < \infty$. Potem za vsak $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ velja ocena

$$\int |f|^p \, d\mu = \int_{\operatorname{supp}(f)} |f|^p \, d\mu \leq (\sup |f|)^p \cdot \mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty,$$

saj je zvezna funkcija na kompaktni množici omejena, Lebesgue-Stieltjesova mera kompaktne množice pa končna. To pomeni, da je $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ podprostor Banachovega prostora $L^p(\mu)$.

Brez dokaza navedimo naslednji izrek.

Izrek 4.7 *Naj bo μ Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathbb{R}$ in $1 \leq p < \infty$. Potem je $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ gost podprostor prostora $L^p(\mu)$. Povedano z drugimi (bolj učenimi) besedami: Banachov prostor $L^p(\mu)$ je napolnitev normiranega prostora $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, opremljenega z L^p-normo.*

Če v zadnjem izreku vzamemo Lebesgueovo mero in funkcije zožimo na končni interval $[a,b]$, ugotovimo, da je Banachov prostor $L^p([a,b])$ napolnitev normiranega prostora $\mathcal{C}([a,b])$, opremljenega z L^p-normo. Ker to posebej velja za $p = 1$, je potemtakem Lebesgueov integral, ki je definiran za funkcije iz Banachovega prostora $L^1([a,b])$, razširitev Riemannovega integrala, ki je "v bistvu" definiran samo za funkcije iz gostega podprostora $\mathcal{C}([a,b])$ prostora $L^1([a,b])$.