Poglavje 1

MERE

1.1 Uvod

Pojem mere je naravna posplošitev znanih geometrijskih pojmov: dolžina intervala, ploščina ravninskega lika in prostornina območja v prostoru. Če lik (ali območje) omejuje dovolj "lepa"krivulja (ali ploskev), potem lahko ploščino (ali prostornino) izračunamo z Riemannovim integralom. Idealno bi bilo pri vsaki razsežnosti $n \in \mathbb{N}$ imeti preslikavo $\mu = \mu_n$, ki bi vsaki množici $E \subseteq \mathbb{R}^n$ priredila n-razsežno mero $\mu(E) \in [0, \infty]$. Taka preslikava bi morala zadoščati naslednjim pogojem:

(1) Če je $K = [0, 1) \times [0, 1) \times \ldots \times [0, 1)$ enotska kocka v $\mathbb{R}^n$, potem je $\mu(K) = 1$;

(2) Če je množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ dobljena iz množice $E \subseteq \mathbb{R}^n$ s translacijami, rotacijami in zrcaljenji, potem je $\mu(F) = \mu(E)$;

(3) Če je E_1, E_2, ... končno ali neskončno zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathbb{R}^n$, potem je

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots .$$

Žal taka preslikava μ ne obstaja že pri $n = 1$. Te zahteve namreč skupaj z aksiomom izbire vodijo v protislovje (glej vaje). Medtem ko je prva dva pogoja težko omiliti, bi lahko v tretjem pogoju zahtevali aditivnost samo za končna zaporedja. Izkaže se, da to ni pametno narediti, saj ravno aditivnost za števno neskončna zaporedja zagotavlja veljavnost preprostih limitnih izrekov. Poleg tega tudi pri tem šibkejšem pogoju taka preslikava μ ne obstaja, če je le $n \geq 3$. To je enostavna posledica izreka Banacha in Tarskega iz leta 1924:

Izrek 1.1 *Naj bosta U in V omejeni množici v $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, ki imata neprazni notranjosti. Potem obstaja naravno število k in množice E_1, ..., E_k, F_1, ..., F_k v $\mathbb{R}^n$, ki zadoščajo naslednjim pogojem:*

(i) $E_1 \cup \ldots \cup E_k = U$ *in* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *za* $i \neq j$*;*

(ii) $F_1 \cup \ldots \cup F_k = V$ *in* $F_i \cap F_j = \emptyset$ *za* $i \neq j$*;*

(iii) za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$ *je množica* F_i *dobljena iz množice* E_i *s translacijami, rotacijami in zrcaljenji.*

O tem paradoksu Banacha in Tarskega lahko več preberemo v knjigi Milana Hladnika: *Moderna kvadratura kroga*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1995. Ni odveč pripomniti, da so množice E_i in F_i zelo bizarne. Ni se jih mogoče vizualno predstavljati in njihova definicija temelji na aksiomu izbire. S tem izrekom pa je lahko dokazati, da preslikava μ (za $n \geq 3$) ne obstaja tudi v primeru, ko v zadnjem pogoju zahtevamo aditivnost samo za končna zaporedja množic. Predpostavimo nasprotno, da taka preslikava μ obstaja in opišimo pot do protislovja. Z uporabo pogojev (ii) in (iii) iz izreka 1.1 dobimo, da je

$$\mu(U) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(F_i) = \mu(V)$$

za poljubni omejeni množici U in V v $\mathbb{R}^n$, ki imata neprazni notranjosti. Če postavimo $U = [0,2) \times [0,1) \times [0,1) \times \ldots \times [0,1)$ in $V = K$, imamo $\mu(U) = \mu(K) = 1$. Ker pa lahko U zapišemo kot disjunktno unijo množice K in množice, ki jo dobimo s translacijo množice K, mora po drugi strani veljati $\mu(U) = 2 \cdot \mu(K) = 2$. Protislovje!

Nauk te zgodbe je, da od μ ne smemo zahtevati, da je definirana za vse množice v $\mathbb{R}^n$, temveč le na dovolj velikem razredu množic. Kakšno strukturo je smiselno zahtevati za tak razred množic, si bomo ogledali v naslednjem razdelku.

1.2 σ-algebre

Naj bo X neprazna mnošica. Družino $\mathcal{M}$ podmnožic množice X imenujemo **algebra**, kadar vsebuje X in je zaprta za komplemente in za končne unije, tj. kadar so izpolnjeni pogoji:

(a) $X \in \mathcal{M}$;

(b) Če je $E \in \mathcal{M}$, potem je $E^c \in \mathcal{M}$;

(c) Če so množice E_1, ..., E_n v $\mathcal{M}$, potem je $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ tudi v $\mathcal{M}$.

Očitno algebra vsebuje vsaj še prazno množico $\emptyset$, saj je $\emptyset = X^c$.

Algebri $\mathcal{M}$ pravimo **σ-algebra**, kadar je celo zaprta za števne unije, tj. kadar velja sklep:

(c') Če je E_1, E_2, ... zaporedje množic v $\mathcal{M}$, potem je $E_1 \cup E_2 \ldots$ tudi v $\mathcal{M}$. Elementom σ-algebre pravimo **merljive množice**, paru $(X, \mathcal{M})$ pa **merljiv prostor**.

Ker je $\cap_i E_i = (\cup_i E_i^c)^c$, je algebra zaprta za končne preseke, σ-algebra pa tudi za števne preseke svojih članov. Ker je $E \setminus F = E \cap F^c$, je algebra zaprta za razlike, tj. iz $E, F \in \mathcal{M}$ sledi $E \setminus F \in \mathcal{M}$.

Oglejmo si nekaj enostavnih zgledov (σ-)algeber.

Zgled 1.2 *Če je X poljubna neprazna množica, potem je $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ σ-algebra, ki je najmanjša možna (glede na inkluzijo). Največja σ-algebra pa je potenčna množica $\mathcal{P}(X)$ množice X.*

Zgled 1.3 *Če sta S in L zaporedoma množici sodih in lihih naravnih števil, potem je $\mathcal{M} = \{\emptyset, S, L, \mathbb{N}\}$ σ-algebra, ki je najmanjša med vsemi algebrami, ki vsebujejo S.*

Ugodno je poznati naslednjo trditev.

Trditev 1.4 *Naj bo $\mathcal{M}$ algebra podmnožic neprazne množice X. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(a) $\mathcal{M}$ je σ-algebra;

(b) $\mathcal{M}$ je zaprta za števne disjunktne unije, tj. če je $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$, potem je $\cup_{n=1}^\infty E_n$ tudi v $\mathcal{M}$.

(c) $\mathcal{M}$ je zaprta za unije naraščajočih zaporedij, tj. če je $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ zaporedje množic v $\mathcal{M}$, za katerega velja $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$, potem je $\cup_{n=1}^\infty E_n$ tudi v $\mathcal{M}$.

Dokaz. Očitno iz (a) sledi (b). Za dokaz implikacije (b) $\Rightarrow$ (c) vzemimo poljubno naraščajoče zaporedje $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ množic v $\mathcal{M}$ in definirajmo

$$F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus E_{n-1} \ (n \geq 2).$$

Potem je $\{F_n\}$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$. Zato je po (b) unija $\cup_{n=1}^\infty F_n$ tudi v $\mathcal{M}$. Ker pa je ta unija enaka $\cup_{n=1}^\infty E_n$, smo dokazali (c).

Za dokaz implikacije (c) $\Rightarrow$ (a) vzemimo poljubno zaporedje E_1, E_2, ... množic v $\mathcal{M}$ in definirajmo novo zaporedje

$$F_n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n.$$

Potem je $\{F_n\}$ naraščajoče zaporedje množic v $\mathcal{M}$, za katerega velja $\cup_{n=1}^\infty E_n = \cup_{n=1}^\infty F_n$. Po (c) ta unija pripada $\mathcal{M}$, torej velja (a). $\square$

Definicija σ-algebre je sorodna definiciji topologije. Čeprav jo že poznamo, jo ponovimo. Družina $\mathcal{T}$ podmnožic neprazne množice X je **topologija**, kadar so izpolnjeni pogoji:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;
- če so množice $U_1, \ldots, U_n$ v $\mathcal{T}$, potem je $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ tudi v $\mathcal{T}$;
- če je $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ družina množic v $\mathcal{T}$, potem je $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ tudi v $\mathcal{T}$.

Elementom topologije $\mathcal{T}$ pravimo **odprte množice**, njihovim komplementom pa **zaprte množice**. Paru $(X, \mathcal{T})$ rečemo **topološki prostor**.

Lahko je preveriti, da je presek poljubne družine σ-algeber tudi σ-algebra. Če je torej $\mathcal{D}$ podmnožica potenčne množice $\mathcal{P}(X)$, potem je presek vseh σ-algeber na X, ki vsebujejo $\mathcal{D}$, najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{D}$. Označimo jo z $\sigma(\mathcal{D})$ in ji pravimo **σ-algebra, generirana** z $\mathcal{D}$.

Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Potem je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T})$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse odprte množice. Imenujemo jo **Borelova σ-algebra**, njene elemente pa **Borelove množice**. Očitno je $\mathcal{B}$ enaka najmanjši σ-algebri, ki vsebuje vse zaprte množice. Borelova σ-algebra vsebuje vse števne preseke odprtih množic, ki jih imenujemo **G_δ-množice**. Pravtako vsebuje tudi vse števne unije zaprtih množic, ki jim pravimo **F_σ-množice**.

Zgled 1.5 *V primeru prostora $\mathbb{R}$ realnih števil (z običajno topologijo) je polzaprti interval $[a, b)$ $(a < b)$ hkrati G_δ-množica in F_σ-množica, saj velja*

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b) \quad \textit{in} \quad [a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}].$$

Ker je vsaka odprta množica v $\mathbb{R}$ števna unija odprtih intervalov, je Borelova σ-algebra enaka σ-algebri, generirani z vsemi odprtimi intervali.

Razdelek zaključimo z naslednjim pomožnim rezultatom. Družini $\mathcal{E}$ podmnožic množice X pravimo **elementarna družina**, kadar velja

- $\emptyset \in \mathcal{E}$;
- če sta E in F v $\mathcal{E}$, potem je $E \cap F \in \mathcal{E}$;
- če je $E \in \mathcal{E}$, potem je E^c končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{E}$.

Zgled 1.6 *Naj bo $\mathcal{E}$ družina vseh intervalov oblike $(a, b]$, (a, ∞), kjer je $-\infty \leq a < b < \infty$. Če ji dodamo še prazno množico, $\mathcal{E}$ postane elementarna družina, saj je zaprta za končne preseke, za vsak $E \in \mathcal{E}$ pa je E^c bodisi v $\mathcal{E}$ bodisi disjunktna unija dveh množic iz $\mathcal{E}$.*

Trditev 1.7 *Naj bo $\mathcal{E}$ elementarna družina podmnožic neprazne množice X. Potem je družina $\mathcal{A}$ vseh končnih disjunktnih unij množic iz $\mathcal{E}$ algebra.*

Dokaz. Vaje. $\square$

1.3 Mere

Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor. **Mera** na $\mathcal{M}$ (oziroma na $(X, \mathcal{M})$) je preslikava $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, za katero velja

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) μ je **števno aditivna**, to pomeni, da za vsako zaporedje $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$ velja enakost

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Pogosto pravimo, da je μ mera na X, če je jasno, kaj je $\mathcal{M}$.

Zgled 1.8 *Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Če je množica $E \in \mathcal{M}$ neskončna, definirajmo $\mu(E) = \infty$, če pa je končna, naj bo $\mu(E)$ število njenih elementov. Potem je μ mera na $(X, \mathcal{M})$, ki jo imenujemo* **mera štetja točk** *(angleško: counting measure).*

V primeru $X = \mathbb{N}$ lahko izberemo poljubno zaporedje $\{a_n\}$ nenegativnih realnih števil in za $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo $\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n$. Torej je $\mu(\{n\}) = a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem je μ mera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. V posebnem primeru $a_n = 1$ dobimo mero štetja točk na $\mathbb{N}$.

Zgled 1.9 *Naj bo x_0 točka v množici X in $\mathcal{M}$ poljubna σ-algebra na X. Za $E \in \mathcal{M}$ definirajmo $\mu(E) = 1$, če je $x_0 \in E$, in $\mu(E) = 0$ sicer. Potem je μ mera na $(X, \mathcal{M})$, ki jo imenujemo* **Diracova mera**.

Zgled 1.10 *Naj bo X neskončna množica. Če je $E \subseteq X$ končna množica, definirajmo $\mu(E) = 0$, če pa je neskončna, postavimo $\mu(E) = \infty$. Potem je μ končno aditivna preslikava na merljivem prostoru $(X, \mathcal{P}(X))$. Ker ni števno aditivna, ni mera.*

Izrek 1.11 *Naj bo μ mera na $(X, \mathcal{M})$. Potem velja:*

1. *(**končna aditivnost**) Če so $E_1, \ldots, E_n$ paroma disjunktne množic v $\mathcal{M}$, potem je*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

2. *(**monotonost**) Če sta E in F množici v $\mathcal{M}$, za kateri je $E \subseteq F$, potem je $\mu(E) \leq \mu(F)$. Če je še $\mu(E) < \infty$, potem je $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

3. *(**števna subaditivnost**) Za vsako zaporedje $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ množic v $\mathcal{M}$ velja neenakost*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

4. *(**notranja zveznost**) Če za zaporedje $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ množic v $\mathcal{M}$ velja $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$, potem je*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

5. *(**zunanja zveznost**) Če za zaporedje $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ množic v $\mathcal{M}$ velja $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$ in $\mu(E_1) < \infty$, potem je*
$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Dokaz.

1. Končna aditivnost sledi iz števne, če postavimo $E_i = \emptyset$ za vse $i > n$.

2. Ker je $F = E \cup (F \setminus E)$ in $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$, zaradi končne aditivnosti velja $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$. Če je še $\mu(E) < \infty$, potem smemo od zadnje enakosti odšteti to število in dobimo enakost $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

3. Iz danega zaporedja $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ induktivno definirajmo novo zaporedje
$$F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus \left(\cup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \ (n \geq 2).$$
Potem je $\{F_n\}$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$, za kateregа velja $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Ker je $F_n \subseteq E_n$ za vsak n, imamo
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

4. Če postavimo $E_0 = \emptyset$, potem je s predpisom $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ definirano zaporedje $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ paroma disjunktnih merljivih množic, za katero velja

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = E_n \quad \text{za vsak } n \quad \text{in} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Tako imamo

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

5. Ker je $\mu(E_1) < \infty$, je zaradi monotonosti $\mu(E_n) < \infty$ za vsak n. Če definiramo $F_n = E_1 \setminus E_n$, potem imamo $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots$ in $\mu(F_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n)$ po točki 2. Ker je $\cup_{i=1}^{\infty} F_i = E_1 \setminus (\cap_{i=1}^{\infty} E_i)$, z uporabo točk 2 in 4 dobimo

$$\mu(E_1) - \mu(\cap_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

od koder sledi želena enakost.

$\square$

Pogoj $\mu(E_1) < \infty$ v točki 5. lahko nadomestimo s pogojem, da je $\mu(E_n) < \infty$ za neki $n > 1$, saj lahko izpustimo množice $E_1, \ldots, E_{n-1}$ in s tem ne vplivamo na zaključek trditve. Pokažimo še z zgledom, da pogoja ne moremo popolnoma izpustiti.

Zgled 1.12 *Naj bo μ mera štetja točk na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ in*

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Potem je $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$, za vsak n velja $\mu(E_n) = \infty$, vendar ima presek $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ mero enako 0.

Mera μ na X je **končna**, če je $\mu(X) < \infty$. Če je $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, kjer ima za vsak n merljiva množica E_n končno mero, potem je mera μ **σ-končna**.

Če ima merljiva množica E mero enako 0, potem jo imenujemo **ničelna množica**. Zaradi števne subaditivnost mere je števna unija ničelnih množic tudi ničelna.

Če neka trditev o točkah $x \in X$ velja za vse x izven neke ničelne množice, pravimo, da velja **skoraj povsod**, kar pišemo **s.p.** (angleško: almost everywhere, a.e.). Rečemo tudi, da trditev velja **skoraj za vse** $x \in X$.

Mera μ na $(X, \mathcal{M})$ je **polna**, kadar $\mathcal{M}$ vsebuje vse podmnožice poljubne ničelne množice v $\mathcal{M}$, tj. iz $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ in $F \subseteq E$ sledi $F \in \mathcal{M}$ (seveda je $\mu(F) = 0$ zaradi monotonosti mere). Če mera ni polna, potem jo lahko **napolnimo** z razširitvijo σ-algebre $\mathcal{M}$.

Izrek 1.13 *Naj bo μ mera na $(X, \mathcal{M})$. Naj bo $\tilde{\mathcal{M}}$ družina vseh množic $E \subseteq X$, za katere obstajata množici A in B iz $\mathcal{M}$, da velja $A \subseteq E \subseteq B$ in $\mu(B \setminus A) = 0$. Za tako množico E definirajmo $\tilde{\mu}(E) = \mu(A)$. Potem je $\tilde{\mathcal{M}}$ σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{M}$, in $\tilde{\mu}$ je polna mera na $(X, \tilde{\mathcal{M}})$, ki je razširitev mere μ.*

Dokaz. Vaje. □

Polno mero $\tilde{\mu}$ imenujemo **napolnitev mere** μ, σ-algebro $\tilde{\mathcal{M}}$ pa **napolnitev σ-algebre** $\mathcal{M}$.

Zgled 1.14 *Naj bo $X = \{1, 2, 3\}$ in $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}$. S predpisoma $\mu(\{1, 2\}) = 0$ in $\mu(\{3\}) = 1$ je natanko določena mera μ na $\mathcal{M}$, ki pa ni polna, saj je $\{1\} \subset \{1, 2\}$ in $\mu(\{1, 2\}) = 0$, toda množica $\{1\}$ ni merljiva. Opazimo, da je $x = 3$ skoraj za vse $x \in X$. Napolnitev tega merljivega prostora je določena z $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(X)$ in $\tilde{\mu}(\{1\}) = \tilde{\mu}(\{2\}) = 0$.*

1.4 Zunanje mere

Za konstrukcijo bolj zapletenih pozitivnih mer je ugodno vpeljati pojem zunanje mere. **Zunanja mera** na neprazni množici X je preslikava $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, za katero velja

- $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- μ^* je **monotona**, tj. iz $A \subseteq B$ sledi $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- μ^* je **števno subaditivna**, to pomeni, da za vsako zaporedje $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ podmnožic množice X velja neenakost

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Do zunanje mere običajno pridemo tako, da jo najprej definiramo na družini preprostih množic (npr. na pravokotnikih v ravnini), potem pa to definicijo razširimo na naslednji način.

Trditev 1.15 *Naj družina $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vsebuje $\emptyset$ in X. Naj bo $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ preslikava z lastnostjo $\rho(\emptyset) = 0$. Potem je s predpisom*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : E_i \in \mathcal{E} \text{ in } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}$$

definirana zunanja mera μ^* na X.

Dokaz. Ker lahko vzamemo $E_i = X$ za vsak i, je množica na desni neprazna in je tako definicija smiselna. Ker je $\rho(\emptyset) = 0$, je $\mu^*(\emptyset) = 0$. Očitno iz $A \subseteq B$ sledi $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, saj množica, katere infimum določamo v definiciji $\mu^*(A)$, vsebuje ustrezno množico iz definicije $\mu^*(B)$. Za dokaz števne subaditivnosti vzemimo poljubno zaporedje $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ podmnožic množice X in izberimo $\epsilon > 0$. Brez izgube splošnosti smemo privzeti, da je $\mu^*(A_i) < \infty$ za vsak i. Po definiciji za vsak i obstaja tako zaporedje $\{E_{i,j}\}_{j=1}^\infty$ v $\mathcal{E}$, da velja

$$A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty E_{i,j} \text{ in } \sum_{j=1}^\infty \rho(E_{i,j}) < \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Potem za $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$ velja

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty E_{i,j} \text{ in } \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \rho(E_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i) + \epsilon.$$

Ker je ϵ poljuben, je dokaz končan. □

Naj bo μ^* zunanja mera na X. Za množico $A \subseteq X$ očitno velja $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ za vsako množico $E \subseteq X$. Množica $A \subseteq X$ je **μ^*-merljiva**, kadar v neenakosti vedno velja enakost, tj. kadar velja

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \text{ za vsako množico } E \subseteq X.$$

Očitno je za μ^*-merljivost množice $A \subseteq X$ dovolj preveriti, da $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ za vse množice $E \subseteq X$ z $\mu^*(E) < \infty$.

Izrek 1.16 (**Carathéodory**) *Če je μ^* zunanja mera na X, potem je družina $\mathcal{M}$ vseh μ^*-merljivih množic σ-algebra, zožitev μ^* na $\mathcal{M}$ pa je polna mera.*

Dokaz. Očitno je $\mathcal{M}$ zaprta za komplemente, saj A in A^c v definiciji μ^*-merljivosti nastopata simetrično. Če sta A in B v $\mathcal{M}$ ter $E \subseteq X$, potem je

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) =$$

$$= (\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)) + (\mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)).$$

Ker je $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, zaradi subaditivnosti velja neenakost

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c).$$

Ker je $E \cap A^c \cap B^c = E \cap (A \cup B)^c$, imamo torej neenakost

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c),$$

ki dokazuje, da je $A \cup B \in \mathcal{M}$. Ker očitno $X \in \mathcal{M}$, je torej $\mathcal{M}$ algebra.

Po trditvi 1.4 je $\mathcal{M}$ σ-algebra, če pokažemo, da je zaprta za števne disjunktne unije. Vzemimo poljubno zaporedje $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$ in definirajmo $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$ in $B = \cup_{i=1}^\infty A_i$. Potem za poljubno množico $E \subseteq X$ velja

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),$$

od koder induktivno izpeljemo, da je

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i).$$

Ker je $B_n \in \mathcal{M}$ in zunanja mera monotona, dobimo neenakost

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Če pošljemo n v neskončnost, dobimo

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq$$

$$\geq \mu^*(\cup_{i=1}^\infty (E \cap A_i)) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E),$$

kjer smo upoštevali tudi subaditivnost zunanje mere. To pomeni, da so vse neenakosti v resnici enakosti. Zato je $B \in \mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$ je res σ-algebra. Hkrati za $E = B$ dobimo enakost

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i),$$

torej je zožitev μ^* na $\mathcal{M}$ števno aditivna.

Če je $\mu^*(A) = 0$, potem za poljubno množico $E \subseteq X$ velja

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

torej je $A \in \mathcal{M}$. S tem smo pokazali polnost zožitve μ^* na $\mathcal{M}$. □

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra podmnožic neprazne množice X. Preslikavo $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ imenujemo **mera na algebri** (angleško: pre-measure), kadar velja

- $\mu_0(\emptyset) = 0$;
- če je $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{A}$, za katero $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$, potem je
$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu_0(A_i).$$

Očtina je vsaka mera na algebri končno aditivna preslikava, saj lahko postavimo $A_i = \emptyset$ od nekega indeksa dalje. Z njo lahko generiramo zunanjo mero kot v trditvi 1.15.

Trditev 1.17 *Naj bo μ_0 mera na algebri $\mathcal{A}$ in μ^* zunanja mera na X, podana s predpisom*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) : A_i \in \mathcal{A} \text{ in } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Potem je:

(a) μ_0 zožitev μ^* na $\mathcal{A}$;

(b) vsaka množica v $\mathcal{A}$ μ^*-merljiva.

Dokaz. Naj bo $E \in \mathcal{A}$. Potem je $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$, saj lahko vzamemo $A_1 = E$ in $A_i = \emptyset$ za vse $i \geq 2$. Za dokaz obratne neenakosti naj bo $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ za neke $A_i \in \mathcal{A}$. Če postavimo $B_n = E \cap (A_n \setminus \cup_1^{n-1} A_i)$, potem je $\{B_n\}$ zaporedje paroma disjunktnih množic iz $\mathcal{A}$, katerih unija je enaka E. Zato je $\mu_0(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$, od koder sledi, da je $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$. S tem smo dokazali točko (a).

Za dokaz točke (b) vzemimo $A \in \mathcal{A}$, $E \subseteq X$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja tako zaporedje $\{A_i\}$ v $\mathcal{A}$, da je $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ in $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Ker je $\mu_0(A_i) = \mu_0(A_i \cap A) + \mu_0(A_i \cap A^c)$, je

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Ker je ϵ poljuben, od tod sledi, da je množica A μ^*-merljiva. □

Izrek 1.18 *Naj bo μ_0 mera na algebri $\mathcal{A}$, μ^* pripadajoča zunanja mera na X in $\mathcal{M}$ σ-algebra, generirana z $\mathcal{A}$. Potem je zožitev μ zunanje mere μ^* na $\mathcal{M}$ mera na $\mathcal{M}$, ki razširja μ_0.*

Če je ν še ena mera na $\mathcal{M}$, ki razširja μ_0, potem je $\nu(E) \leq \mu(E)$ za vsak $E \in \mathcal{M}$ in v primeru $\mu(E) < \infty$ velja enakost.

Če je μ_0 σ-končna, potem je μ edina razširitev za μ_0 na σ-algebro $\mathcal{M}$.

Dokaz. Po izreku 1.16 je družina $\mathcal{M}^*$ vseh μ^*-merljivih množic σ-algebra, zožitev μ zunanje mere μ^* na $\mathcal{M}^*$ pa je polna mera. Po trditvi 1.17 je μ_0 zožitev μ^* na $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^*$. Zato je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$ in μ je mera na $\mathcal{M}$, ki razširja μ_0. Torej drži prva trditev v izreku.

Za dokaz druge trditve vzemimo $E \in \mathcal{M}$ in $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ za neke $A_i \in \mathcal{A}$. Potem je

$$\nu(E) \leq \nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i),$$

od koder vidimo, da je $\nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E)$. Predpostavimo sedaj še, da je $\mu(E) < \infty$. Potem pri izbranem $\epsilon > 0$ obstaja tako zaporedje $\{A_i\}$ v $\mathcal{A}$, da je $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i =: A$ in $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu(E) + \epsilon$, torej je $\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) < \epsilon$. Ker je $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(A)$, je

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \epsilon.$$

Ker je ϵ poljuben, je torej $\nu(E) = \mu(E)$.

Za dokaz zadnje trditve predpostavimo, da je $X = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, kjer je $\mu_0(A_i) < \infty$ za vsak i. Tukaj smemo privzeti, da so množice paroma disjunktne. Tedaj za poljubno množico $E \in \mathcal{M}$ velja

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i) = \mu(E),$$

torej je $\nu = \mu$. □

1.5 Borelove mere na $\mathbb{R}$

Naj bo $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$. Mero na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ imenujemo **Borelova mera**.

Za vsako končno Borelovo mero μ definiramo **porazdelitveno funkcijo** $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Take funkcije so pomembne v verjetnostnem računu, ker podajajo porazdelitev slučajnih spremenljivk. Če je Borelova mera končna le na omejenih Borelovih množicah, moramo pripadajočo funkcijo F definirati nekoliko drugače.

Trditev 1.19 *Naj bo μ Borelova mera na $\mathbb{R}$, ki je končna na vseh omejenih Borelovih množicah. Potem je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & , \text{ če } x > 0, \\ 0 & , \text{ če } x = 0, \\ -\mu((x, 0]) & , \text{ če } x < 0, \end{cases}$$

naraščajoča in z desne zvezna.

Če je $a < b$, potem je $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$.

Če je Borelova mera μ končna, potem njeno porazdelitveno funkcijo dobimo, če funkciji F prištejemo konstanto $\mu((-\infty, 0])$.

Dokaz. Ker je μ monotona preslikava, je funkcija F je naraščajoča. Če je $\{x_n\}$ padajoče zaporedje realnih števil, ki konvergira proti realnemu številu $x \geq 0$, potem je $(0,x] = \cap_{n=1}^{\infty}(0,x_n]$ in zato zaradi zunanje zveznosti mere velja

$$F(x) = \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty}(0,x_n]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu((0,x_n]) = \lim_{n\to\infty} F_n(x),$$

torej je funkcija F z desne zvezna v vsaki točki $x \geq 0$. Podobno pokažemo zveznost z desne v točkah $x < 0$, pri čemer presek zamenjamo z unijo in namesto zunanje zveznosti upoštevamo notranjo zveznost mere.

Pri dokazovanju enakosti $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ moramo obravnavati več možnosti glede na predznak števil a in b. Enakost dokažimo le v primeru $0 < a < b$:

$$\mu((a,b]) = \mu((0,b] \setminus (0,a]) = \mu((0,b]) - \mu((0,a]) = F(b) - F(a).$$

Zadnja trditev očitno velja. □

V tem razdelku bomo spoznali, da velja obratno, da vsaka naraščajoča funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je z desne zvezna, določa Borelovo mero μ_F, za katero velja $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ za vse $a < b$. V posebnem primeru $F(x) = x$ bomo dobili torej Borelovo mero, katere vrednost na intervalih je njihova dolžina.

Naj bo $\mathcal{E}$ družina vseh intervalov oblike $(a,b]$, (a,∞), kjer je $-\infty \leq a < b < \infty$. Če dodamo še prazno množico, je $\mathcal{E}$ elementarna družina, kot smo videli pred trditvijo 1.7. Po tej trditvi je družina $\mathcal{A}$ vseh končnih disjunktnih unij množic iz $\mathcal{E}$ algebra. Ker je vsak odprt interval števna unija intervalov iz $\mathcal{E}$, je σ-algebra, generirana z $\mathcal{A}$, enaka Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Trditev 1.20 *Naj bo funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča in z desne zvezna. Za paroma disjunktne intervale $(a_1,b_1]$, …, $(a_n,b_n]$ naj bo*

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\right) = \sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i)).$$

Če definiramo še $\mu_0(\emptyset) = 0$, potem je μ_0 mera na algebri $\mathcal{A}$.

Dokaz. Dokaz je bolj tehničen, kot bi pričakovali. Problem je v tem, da elementi iz $\mathcal{A}$ nimajo enolične predstavitve kot končne disjunktne unije množic iz $\mathcal{E}$. Zato pokažimo le, da je μ_0 dobro definirana preslikava. Če je unija paroma disjunktnih intervalov $(a_1,b_1]$, …, $(a_n,b_n]$ enaka intervalu $(a,b]$, kjer smemo predpostaviti, da je $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 \ldots < b_n = b$, potem je $\sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i)) = F(b) - F(a)$. Poglejmo splošni primer, ko je $\cup_{i=1}^{n} I_i = \cup_{j=1}^{m} J_j$, kjer sta $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ in $\{J_j\}_{j=1}^{m}$ končni zaporedji paroma disjunktnih množic iz $\mathcal{E}$. Tedaj s prejšnjim razmislekom dobimo

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_0(I_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(J_j).$$

To že pomeni, da je μ_0 dobro definirana preslikava, ki je očitno končno aditivna. $\square$

Izrek 1.21 *Naj bo funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča in z desne zvezna. Potem obstaja natanko ena Borelova mera μ_F na $\mathbb{R}$, za katero velja $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ za vse a in b.*

Če je $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ druga taka funkcija, potem je $\mu_G = \mu_F$ natanko tedaj, ko je $G - F$ konstantna funkcija.

Če obratno za Borelovo mero μ na $\mathbb{R}$, ki je končna na omejenih Borelovih množicah, definiramo funkcijo F kot v trditvi 1.19, potem je $\mu_F = \mu$.

Dokaz. Po trditvi 1.20 funkcija F določa mero μ_0 na algebri $\mathcal{A}$, ki je σ-končna, saj je $\mathbb{R} = \cup_{k=-\infty}^{\infty}(k, k+1]$ in $\mu_0((k, k+1]) = F(k+1) - F(k) < \infty$. Druga taka funkcija G določa isti μ_0 natanko takrat, ko je $G - F$ konstantna funkcija. Zato prvi dve trditvi sledita iz izreka 1.18. Zadnja trditev je očitna. $\square$

Iz dokaza izreka 1.18 je razvidno, da vsaka naraščajoča in z desne zvezna funkcija F ne inducira samo Borelove mere μ_F, temveč polno mero μ, definirano na σ-algebri $\mathcal{M}_\mu$, ki vsebuje $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Videli bomo, da je ta mera ravno napolnitev mere μ_F. Imenujemo jo **Lebesgue-Stieltjesova mera**, pridružena funkciji F. Torej za vse $E \in \mathcal{M}_\mu$ velja

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]\right\} =$$
$$= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i, b_i]) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]\right\}.$$

V naslednji trditvi bomo pokazali, da lahko odprto-zaprte intervale v zadnji enakosti nadomestimo z odprtimi.

Trditev 1.22 *Za vsako množico $E \in \mathcal{M}_\mu$ velja*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i, b_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}.$$

Dokaz. Označimo z $\nu(E)$ izraz na desni in predpostavimo, da je $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Vsakega od intervalov (a_i, b_i) zapišimo kot unijo disjunktnih intervalov $\{(c_{i,j}, c_{i,j+1}]\}_{j=1}^{\infty}$, kjer je $c_{i,1} = a_i$ in zaporedje $\{(c_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ strogo narašča proti b_i. Potem je

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(c_{i,j}, c_{i,j+1}]$$

in

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu((c_{i,j}, c_{i,j+1}]) \geq \mu(E),$$

torej velja $\nu(E) \geq \mu(E)$.

Za dokaz obratne neenakosti pri izbranem $\epsilon > 0$ obstaja tako zaporedje $\{(a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$, da je $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$ in $\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i]) \leq \mu(E) + \epsilon$. Zaradi zveznosti z desne za vsak i obstaja tak $\delta_i > 0$, da je $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon/2^i$. Potem je

$$\mu((a_i, b_i+\delta_i)) \leq \mu((a_i, b_i])+\mu((b_i, b_i+\delta_i]) = \mu((a_i, b_i])+F(b_i+\delta_i)-F(b_i) < \mu((a_i, b_i])+\frac{\epsilon}{2^i}.$$

Zato imamo $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i + \delta_i)$ in

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i + \delta_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i]) + \epsilon \leq \mu(E) + 2\epsilon.$$

Od tod sledi, da je $\nu(E) \leq \mu(E)+2\epsilon$. Ker je ϵ poljuben, imamo torej $\nu(E) \leq \mu(E)$. $\square$

Izrek 1.23 *Za vsako množico $E \in \mathcal{M}_\mu$ velja*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U \textit{ in } U \textit{ je odprta}\} =$$

$$= \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \textit{ in } K \textit{ je kompaktna}\}.$$

Dokaz. Zaradi monotonosti mere je prva enakost dokazana, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka odprta množica U, da je $E \subseteq U$ in $\mu(U) \leq \mu(E) + \epsilon$. Po trditvi 1.22 obstaja tako zaporedje $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$, da je $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ in $\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i)) \leq \mu(E) + \epsilon$. Potem je $U = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ iskana odprta množica, saj je $\mu(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i))$.

Prav tako je druga enakost dokazana, ko utemeljimo neenakost $\mu(E) \leq \sup\{\mu(K) : K \subseteq E$ in K je kompaktna$\}$. Obravnavajmo najprej primer omejene množice E. Pri danem $\epsilon > 0$ po prvi enakosti obstaja taka odprta množica U, da je $\overline{E} \setminus E \subseteq U$ in $\mu(U) < \mu(\overline{E} \setminus E)+\epsilon$, torej je $\mu(U \setminus (\overline{E} \setminus E)) < \epsilon$. Postavimo $K = E \setminus U = \overline{E} \setminus U = \overline{E} \cap U^c$. Potem je množica K kompaktna in $K \subseteq E$. Ker je

$$E \setminus K = E \cap U \subseteq U \setminus (\overline{E} \setminus E),$$

je $\mu(E \setminus K) = \mu(U \setminus (\overline{E} \setminus E)) < \epsilon$, torej $\mu(E) < \mu(K) + \epsilon$. Ker je ϵ poljuben, je enakost dokazana v primeru omejene množice E.

Denimo sedaj, da je E neomejena množica. Naj bo $\epsilon > 0$ in $E_j = E \cap (j, j+1]$ za vsako celo število j. Ker je E_j omejena, po zgornjem obstaja kompaktna množica

$K_j \subseteq E_j$, da je $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \epsilon 2^{-|j|}/3$. Potem je množica $L_n = \cup_{j=-n}^{n} K_j$ kompaktna, vsebovana v E in velja ocena

$$\mu(L_n) = \sum_{j=-n}^{n} \mu(K_j) \geq \sum_{j=-n}^{n} \mu(E_j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^{|j|}} = \mu\left(\cup_{j=-n}^{n} E_j\right) - \epsilon.$$

Ker zaradi notranje zveznosti mere velja $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{j=-n}^{n} E_j)$, imamo torej

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(L_n) \geq \mu(E) - \epsilon,$$

od koder sledi želena neenakost. □

Naj bo X topološki prostor in $\mathcal{B}_X$ Borelova σ-algebra na X. Kot v primeru $X = \mathbb{R}$ mero na $\mathcal{B}_X$ imenujemo **Borelova mera** na X. Borelova mera μ na X je **zunanje regularna**, kadar za vsako Borelovo množico $E \subseteq X$ velja

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U \text{ in } U \text{ je odprta}\},$$

in je **notranje regularna**, kadar za vsako Borelovo množico $E \subseteq X$ velja

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ in } K \text{ je kompaktna}\}.$$

Kadar velja oboje, pravimo, da je mera **regularna**.

Primeri regularnih mer so po izreku 1.23 zožitve Lebesgue-Stieltjesovih mer na Borelovo σ-algebro. Primer neregularne mere je lahko najti.

Zgled 1.24 *Naj bo μ mera štetja točk na Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Potem je $\mu(\{0\}) = 1$, toda $\mu(U) = \infty$ za vsako odprto množico $U \supset \{0\}$. Torej μ ni zunanje regularna.*

Natančneje opišimo množice iz σ-algebre $\mathcal{M}_\mu$, na kateri je definirana Lebesgue-Stieltjesova mera μ.

Izrek 1.25 *Naslednje trditve o množici $E \subseteq \mathbb{R}$ so ekvivalentne:*

(a) $E \in \mathcal{M}_\mu$;

(b) $E = G \setminus M$, kjer je G G_δ-množica in $\mu(M) = 0$;

(c) $E = F \cup N$, kjer je F F_σ-množica in $\mu(N) = 0$.

Torej je σ-algebra $\mathcal{M}_\mu$ napolnitev Borelove σ-algebre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Dokaz. Ker σ-algebra $\mathcal{M}_\mu$ vsebuje $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ in je μ polna mera, iz (b) ali (c) sledi (a).

Za dokaz obratnih implikacij vzemimo najprej, da ima $E \in \mathcal{M}_\mu$ končno mero. Zaradi regularnosti mere za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajata kompaktna množica K_n in odprta množica U_n, da je $K_n \subseteq E \subseteq U_n$ in

$$\mu(U_n) - \frac{1}{n} \le \mu(E) \le \mu(K_n) + \frac{1}{n}.$$

Postavimo $G = \cap_{n=1}^\infty U_n$, $M = G \setminus E$, $F = \cup_{n=1}^\infty K_n$ in $N = E \setminus F$. Potem je G G_δ-množica, F F_σ-množica in velja $F \subseteq E \subseteq G$. Ker je $\mu(E) \le \mu(G) \le \mu(U_n) \le \mu(E) + \frac{1}{n}$ za vsak n, je $\mu(G) = \mu(E)$ in zato $\mu(M) = 0$. Podobno je $\mu(E) = \mu(F)$ in zato $\mu(N) = 0$. S tem je v primeru $\mu(E) < \infty$ dokaz končan.

Pokažimo sedaj, da velja (c) za vse $E \in \mathcal{M}_\mu$. Naj bo $E_j = E \cap [-j, j]$ za vsako naravno število j. Potem ima $E_j \in \mathcal{M}_\mu$ končno mero, zato je $E_j = F_j \cup N_j$, kjer je F_j F_σ-množica in $\mu(N_j) = 0$. Če postavimo $F = \cup_{j=1}^\infty F_j$ in $N = \cup_{j=1}^\infty N_j$, je F F_σ-množica, $\mu(N) = 0$ in $E = F \cup N$.

Dokazati moramo še, da (b) velja za vsako množico $E \in \mathcal{M}_\mu$. Ker je $E^c \in \mathcal{M}_\mu$, po (c) obstajata taka F_σ-množica F in ničelna množica N, da je $E^c = F \cup N$. Potem je $E = F^c \cap N^c = G \setminus N$, kjer je $G = F^c$ G_δ-množica. S tem je dokaz končan. $\square$

Najpomembnejša Lebesgue-Stieltjesova mera je **Lebesgueova mera**, ki je polna mera m, inducirana s funkcijo $F(x) = x$. Z $\mathcal{L}$ označimo σ-algebro, na kateri je definirana, elemente v $\mathcal{L}$ pa imenujemo **Lebesgueovo merljive** množice.

Dokažimo dve pomembni lastnosti Lebesgueove mere. Za $E \subseteq \mathbb{R}$ in $r \in \mathbb{R}$ označimo

$$E + r = \{x + r : x \in E\} \quad \text{in} \quad rE = \{rx : x \in E\}.$$

Izrek 1.26 *Če je $E \in \mathcal{L}$ in $r \in \mathbb{R}$, potem je $E + r \in \mathcal{L}$ in $rE \in \mathcal{L}$ ter velja $m(E + r) = m(E)$ in $m(rE) = |r|\, m(E)$.*

Dokaz. Ker je družina odprtih intervalov invariantna za translacije in množenja s konstantami, enako velja za $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. S predpisoma $\mu(E) = m(E + r)$ in $\nu(E) = m(rE)$ definiramo Borelovi meri na $\mathbb{R}$, ki se zaporedoma ujemata z merama m in $|r|m$ na končnih disjunktnih unijah intervalov. Zaradi enoličnosti v izreku 1.18 se ujemata tudi na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Če je torej $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ in $m(E) = 0$, potem je $\mu(E) = 0$ in $\nu(E) = 0$, od koder sklepamo, da je razred Lebesgueovo merljivih množic z ničelno mero invarianten za translacije in množenja s konstantami. Ker je vsak $E \in \mathcal{L}$ unija Borelove in ničelne množice, je $\mathcal{L}$ invarianten za translacije in množenja s konstantami, torej je $E + r \in \mathcal{L}$ in $rE \in \mathcal{L}$ ter velja $m(E + r) = m(E)$ in $m(rE) = |r|\, m(E)$. $\square$

Kardinalnost σ-algebra $\mathcal{L}$ je enaka kardinalnosti množice $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, torej je 2^c, kjer je c kardinalnost množice $\mathbb{R}$. To bomo v naslednji trditvi pokazali s pomočjo Cantorjeve množice. **Cantorjeva množica** C je množica vseh števil $x \in [0,1]$, ki v trojiškem zapisu nimajo enic, tj. vseh $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$, kjer $a_j \neq 1$ za vse j. Trojiški zapis števila $x \in [0,1]$ je enoličen, razen v primeru, ko je x oblike $p/3^k$, kjer sta p, k naravni števili in p ni deljiv s 3. V tem primeru imamo dva trojiška zapisa: enega z $a_j = 0$ za vse $j > k$ in drugega z $a_j = 2$ za vse $j > k$. Dogovorimo se, da izberemo tistega, kjer $a_k \neq 1$. Tedaj je $a_1 = 1$ natanko takrat, ko je $1/3 < x < 2/3$, in je $a_2 = 1$ natanko takrat, ko je $1/9 < x < 2/9$ ali $7/9 < x < 8/9$.

Trditev 1.27 *Cantorjeva množica C je kompaktna množica z mero $m(C) = 0$. Njena kardinalnost je enaka c in zato σ-algebra $\mathcal{L}$ vsebuje 2^c ničelnih množic.*

Dokaz. Z vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$C_n = \{x \in [0,1] : x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}, a_j = 0,1,2 \text{ za vse } j \text{ in } a_j \neq 1 \text{ za } j \leq n\}.$$

Torej je $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, ... Potem je $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ in $\cap_{n=1}^{\infty} C_n = C$. Očitno je C kompaktna množica. Ker je $m(C_n) = (2/3)^n$ za vsak n, je $m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = 0$.

Naj bo $x \in C$, torej $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$, kjer $a_j \neq 1$ za vse j. Definirajmo $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 2^{-j}$, kjer $b_j = a_j/2$, ki predstavlja število iz $[0,1]$, zapisano v dvojiškem sistemu. Ker je vsako število intervala $[0,1]$ mogoče tako zapisati, je f surjekcija množice C na $[0,1]$, kar pomeni, da je kardinalnost množice C enaka c. Ker ima Cantorjeva množica 2^c podmnožic, ki imajo mero enako 0, je trditev dokazana. $\square$

Funkcija f iz zadnjega dokaza ni injektivna, saj je $f(1/3) = f(2/3) = 1/2$. Na očiten način jo lahko razširimo do naraščajoče funkcije iz $[0,1]$ v $[0,1]$. Dobljena funkcija, ki se imenuje **Cantorjeva funkcija**, je očitno zvezna, saj sicer ne bi bila surjektivna.

Brez dokaza povejmo, da ima Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ kardinalnost enako c, torej $\mathcal{L}$ vsebuje veliko množic, ki niso Borelove. Že iz uvodnega razdelka pa vemo, da obstajajo podmnožice v $\mathbb{R}$, ki niso Lebesgueovo merljive. Torej imamo prave inkluzije $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.