PODIPLOMSKI SEMINAR IZ MATEMATIKE

27.

Bojan Magajna

OSNOVE TEORIJE MERE

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu + \nu_s(A)$$

$$\nu_s \perp \mu$$

DMFA – založništvo

Bojan Magajna

OSNOVE TEORIJE MERE

DMFA – založništvo
Ljubljana 2011

OSNOVE TEORIJE MERE

Povzetek

Ta knjiga obravnava temelje klasične teorije mere in integrala v taki splošnosti, kot običajno nastopa v uporabi na drugih področjih matematike. Glavne teme so: mere na algebrah in σ-algebrah, zunanje mere in razširitve mer, klasični konvergenčni izreki za integral, produktne mere, absolutna zveznost in vzajemna singularnost, integriranje na lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorih in odvajanje mer na evklidskih prostorih.

Ključne besede: σ-algebra, mera, zunanja mera, konvergenca po meri, skoraj enakomerna in skoraj povsod, Lebesgueov integral, absolutna zveznost, vzajemna singularnost, Radon-Nikodýmov odvod, L^p-prostor, lokalno kompakten prostor, pozitivni funkcional, odvod mere.

BASIC MEASURE THEORY

Summary

This book treats foundations of classical measure theory in generality that is usually required in its applications in other branches of mathematics. The main topics are: measures on algebras and σ-algebras, outer measures and extension of measures, classical convergence theorems for integrals, product measures, absolute continuity and mutual singularity, integration on locally compact Hausdorff spaces, derivation of measures on Euclidean spaces.

Key words: σ-algebra, measure, outer measure, convergence in measure, almost uniform and almost everywhere, Lebesgue integral, absolute continuity, mutual singularity, Radon-Nikodým derivative, L^p-spaces, locally compact spaces, positive linear functional, derivation of measure.

Mathematics Subject Classification (2010): 28-01.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.518.1(075.8)

MAGAJNA, Bojan

Osnove teorije mere / Bojan Magajna. – 1. izd. – Ljubljana: DMFA – založništvo, 2011. – (Podiplomski seminar iz matematike, ISSN 1408-063X; 27)

ISBN 978-961-212-241-6

258151680

Kazalo

Predgovor

Pojem integral je prisoten na skoraj vseh področjih matematike in njene uporabe. Klasični Riemannov integral, ki ga spoznamo že v prvih letih študija, je definiran le za dovolj preproste funkcije na dovolj enostavnih podmnožicah v evklidskem prostoru. Že pred več kot stoletjem pa je vzniknila potreba po integriranju funkcij na bolj abstraktnih prostorih. Znani so različni pristopi k splošnejšemu integriranju. Pristop v tej knjigi temelji na pojmu mere, integral pa je Lebesgueov integral, definiran najprej za stopničaste in nato z limitnimi procesi za splošnejše funkcije. Pri drugačnem pristopu, ki vzame za osnovo integral kot linearen funkcional na primernem prostoru funkcij, integracijsko teorijo pa kot teorijo razširitve takega funkcionala na večje prostore funkcij, je pojem mere bolj sekundarnega pomena. Ta, drugi pristop je tudi učinkovit, a zahteva predznanje funkcionalne analize [**21**].

V tej knjigi ne predpostavljamo nobenega predznanja funkcionalne analize. Zadošča le osnovno znanje o množicah, za zadnji dve poglavji pa še poznavanje elementarne topologije in diferencialnega računa. Knjiga je namenjena predvsem študentom matematike na drugi stopnji. Obsega klasične osnove teorije mere in integrala v splošnosti, kot je običajno uporabna na drugih področjih matematike. Zaradi premajhnega števila ur te snovi ni mogoče v celoti obdelati na predavanjih iz predmeta Teorija mere, se pa matematik prej ali slej sreča z njo pri svojem delu. Vsi obravnavani rezultati so klasični, med različnimi možnimi njihovimi dokazi pa smo poskusili izbrati in predstaviti najenostavnejše in najkrajše. Integriranje v evklidskih prostorih in povezavo z Riemannovim integralom obravnavamo le na kratko, saj je ta tema izčrpno obdelana v knjigi [**3**]. (Za razumevanje tukajšnje snovi poznavanje gradiva iz [**3**] sicer ni potrebno, najbrž pa ga olajša.) Da količina snovi ne bi bistveno presegla tega, kar je mogoče predelati v enem semestru, se knjiga omejuje le na osnovno teorijo, njene uporabe na drugih področjih pa ne obravnava. Na koncu smo zato med dopolnilno literaturo navedli tudi nekaj dostopnejših knjig iz nekaterih vej matematike, ki so zelo tesno povezane s teorijo mere.

Prva štiri poglavja so temeljna. Mogoče jih je obdelati v enosemestrskem tečaju, ki obsega dve uri tedensko. Zadnji dve poglavji (integriranje na lokalno kompaktnih prostorih in odvajanje mer na $\mathbb{R}^n$) sta sicer nekoliko zahtevnejši, vendar pomembni v matematični analizi in drugod.

Naloge na koncih razdelkov so namenjene poglabljanju razumevanja in večinoma niso rutinske; nekatere uvajajo novo snov. Težje med nalogami so opremljene z navodili (nekatere so označene z *) in upam, da bodo bralci uspešni pri njihovem reševanju. V slovenščini sicer že imamo dve primerni zbirki nalog iz teorije mere ([**5**], [**13**]), ki vsebujeta tudi dovolj računskih nalog, zato v to knjigo ni bilo treba vključiti veliko takih nalog. Nekaj nalog smo vključili tudi kar med tekst. Te po navadi zahtevajo le preprost razmislek, koristen pri dokazovanju kake kasnejše trditve.

Vladimirju Batagelju se zahvaljujem za pomoč pri uporabi LaTeXa, Alešu Bizjaku za popravke v formulacijah nekaterih nalog, Matjažu Zaveršniku pa za koristne tipografske nasvete in potrpežljivo vnašanje popravkov. Gospodu Janezu Juvanu gre zahvala za pazljiv pregled, ki je pomagal odstraniti marsikatero pravopisno in tipkarsko napako. Še posebej pa sem hvaležen recenzentu Martinu Raiču za zelo temeljito in ekspertno recenzijo. Rad sem upošteval njegove pripombe in dopolnitve ter v tekst vključil nekaj zanimivih dodatnih nalog, ki jih je predlagal.

September 2011

Bojan Magajna

Uvod

Osrednja pojma proučevanja v tej knjigi sta mera in integral. Zgledi mer, ki jih bralci vsaj intuitivno že poznajo, so pojmi dolžine, ploščine, prostornine in verjetnosti. Vendar pa je zgolj intuitivno poznavanje teh pojmov lahko varljivo. Tako se nam morda na prvi pogled zdi, da mora vsaka podmnožica v $\mathbb{R}$ imeti neko dolžino, vsaka ravninska množica neko ploščino in vsaka prostorska množica neko prostornino (ki je lahko tudi 0 ali ∞). Pri tem pričakujemo, da imajo skladne množice (to je take, ki se jih da preslikati eno na drugo s togimi premiki) enako dolžino, ploščino ali prostornino. Nadalje pričakujemo, da je npr. dolžina unije disjunktnih podmnožic A_n v $\mathbb{R}$ enaka vsoti dolžin $d(A_n)$ posameznih podmnožic A_n (in podobno za ploščine ter prostornine podmnožic v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$). To pričakujemo tudi v primeru, ko imamo opravka z neskončno mnogo množicami $A_1, A_2, \ldots$, le da tedaj vsoto $d(A_1) + d(A_2) + \ldots$ razglasimo za ∞, če vrsta divergira. Ta pogoj imenujemo *števna aditivnost*. Spoznali pa bomo, da pojmi dolžine, ploščine in prostornine, ki bi imeli pravkar naštete lastnosti, ne morejo biti definirani na vseh množicah: če poskusimo npr. dolžino definirati na vseh podmnožicah v $\mathbb{R}$ in pri tem zahtevamo, da je dolžina intervala $[0, 1]$ enaka 1, da je dolžina števno aditivna in da ima vsaka množica enako dolžino kot katerakoli njej skladna množica, zaidemo v protislovje.

Od zgoraj omenjenih treh lastnosti se morda zdi še najmanj domača števna aditivnost, zato bi domnevali, da se lahko izognemo protislovju z njeno omilitvijo na končno aditivnost. Vendar se izkaže, da je to rešitev (pa še to ne zadovoljiva) le pri premici in ravnini, ne pa tudi pri $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$. Banach in Tarski sta namreč dokazala, da je mogoče kroglo (ali kako drugo omejeno podmnožico z neprazno notranjostjo v $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$) razdeliti na končno mnogo delov in iz njih sestaviti novo kroglo s polmerom, ki je npr. dvakrat večji od polmera prvotne krogle. Dokaz ni konstruktiven in temelji na aksiomu izbire, je pa rezultat tako presenetljiv, da ga imenujemo *paradoks Banacha in Tarskega* [**14**, str. 92], [**23**, str. 7]. Od tod sledi, da delom, na katere je bila prvotna krogla razdeljena, ne moremo pripisati (običajne) prostornine (saj prvotna krogla ne more imeti enake prostornine kot krogla z večjim polmerom). Za podmnožice premice ali ravnine sicer ni takega paradoksa, vendar pa končno aditivna razširitev pojmov dolžine in ploščine ni enolična. Poleg tega so limitni procesi v matematiki tako pomembni, da ne moremo kar tako opustiti zahteve po števni aditivnosti. Zato je nujno omejiti družine množic, na katerih bodo definirani pojmi dolžine, ploščine in prostornine.

Dolžino bomo tako definirali le na družini podmnožic $\mathcal{L}$ množice $\mathbb{R}$, ki vsebuje vse intervale, vključno z $\mathbb{R}$, je zaprta za komplementiranje (tj. iz $A \in \mathcal{L}$ sledi $A^c \in \mathcal{L}$) in za tvorbo števnih unij (tj. za vsako zaporedje množic $A_n \in \mathcal{L}$ je tudi njihova unija v $\mathcal{L}$). V splošnem bomo družino podmnožic $\mathcal{A}$ dane množice X imenovali *σ-algebra*, če vsebuje X in je zaprta za komplementiranje ter števne unije. Pojem σ-algebre bo bistven, saj bomo mere konstruirali na σ-algebrah. Mera je namreč le števno aditivna preslikava μ iz kake σ-algebre $\mathcal{A}$ v $[0, \infty]$. Da bi bila zares uporabno orodje, mora torej biti mera definirana na σ-algebri, vendar pa v praksi pogosto naletimo na funkcije, ki so naravno najprej definirane le na kaki družini množic, ki ni σ-algebra. Na primer dolžina je naravno definirana na družini $\mathcal{S}$ vseh intervalov in poltrakov v $\mathbb{R}$, ta družina $\mathcal{S}$ pa ni niti algebra (ni zaprta za tvorbo končnih unij), kaj šele σ-algebra. Je pa $\mathcal{S}$ *polalgebra*, če štejemo med intervale tudi prazno množico, ker vsebuje presek poljubnih dveh svojih elementov in se da komplement vsake množice iz $\mathcal{S}$ izraziti kot unija končno mnogo množic iz $\mathcal{S}$. Pojma algebre in polalgebre množic sta tehnična pripomočka, ki za uporabo teorije mere nista najpomembnejša. Večkrat pa je treba v praksi konstruirati mero in σ-algebro, na kateri je definirana, iz funkcije $\zeta : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ (kjer je $\mathbb{P}(X)$ potenčna množica dane množice X), ki je monotona ($\zeta(A) \leq \zeta(B)$, če je $A \subseteq B$), števno subaditivna ($\zeta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n)$ za vsako zaporedje podmnožic $A_n \subseteq X$) in $\zeta(\emptyset) = 0$. Tako funkcijo imenujemo *zunanja mera* na množici X in Karateodorijev izrek (1.5.4) pove, kako iz nje dobiti σ-algebro in mero na njej.

Za dano σ-algebro $\mathcal{A}$ na množici X imenujemo njene elemente *merljive množice*. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ pa je merljiva, če je praslika vsakega intervala merljiva množica. Posebni primeri takih funkcij so karakteristične funkcije χ_A množic $A \in \mathcal{A}$, definirane z $\chi_A(x) = 1$, če je $x \in A$, in $\chi_A(x) = 0$, če $x \notin A$. Za dano mero μ na $\mathcal{A}$ lahko definiramo integral $\int \chi_A \, d\mu := \mu(A)$. Linearno lahko razširimo to definicijo integrala na linearne kombinacije karakterističnih funkcij. Ker bomo videli, da je vsaka nenegativna merljiva funkcija limita naraščajočega zaporedja takih linearnih kombinacij, bo tako integral definiran za vse merljive funkcije z vrednostmi v $[0, \infty]$. Ta, *Lebesgueov integral* se da razširiti tudi na primerne funkcije s kompleksnimi vrednostmi. Od Riemannovega integrala je prožnejši že za funkcije na prostoru $X = \mathbb{R}$, njegova bistvena prednost pa je, da ga lahko definiramo tudi na splošnih prostorih, ne le na podmnožicah v $\mathbb{R}^n$.

Kadar je X topološki prostor, ne le poljubna abstraktna množica, je zanimivo obravnavati tiste σ-algebre, ki so povezane s topologijo prostora (npr. najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse kompaktne ali pa vse odprte množice). Vse zvezne funkcije so tedaj merljive in integral je pozitiven linearen funkcional na prostoru $C_c(X)$ vseh zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem. Osnovni izrek Riesza in Markova (glej 5. poglavje) pove, da so vsi pozitivni funkcionali na

$C_c(X)$ take oblike in da je mera, ki pripada funkcionalu, enolično določena, če zahtevamo, da je dovolj regularna.

Osnovni izrek integralskega računa za Riemannov integral povezuje integriranje zveznih funkcij z odvajanjem. Teorija mere nam omogoči natančnejšo karakterizacijo funkcij, ki so integrali svojih odvodov (to so absolutno zvezne funkcije, glej 6. poglavje). Za boljše razumevanje tega pa bomo obravnavali tudi odvajanje mer. Odvajanje kompleksnih mer na abstraktnih množicah je tudi sicer pomemben del integracijske teorije, uporaben na drugih matematičnih področjih; obravnava ga 4. poglavje. V 6. poglavju pa obdelamo to temo v prostorih $\mathbb{R}^n$, kjer ima odvod mere tudi bolj geometrijsko interpretacijo.

POGLAVJE 1

Merljive množice

1.1. σ-algebra

V tej knjigi bomo pogosto obravnavali podmnožice kake dane množice X. Komplement $X \setminus S$ podmnožice S v tej množici X bomo označili s S^c.

DEFINICIJA 1.1.1. Naj bo X neprazna množica. Družino podmnožic $\mathcal{A}$ množice X imenujemo *σ-algebra* na X, če ima naslednje tri lastnosti:

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) za vsako podmnožico $S \in \mathcal{A}$ je tudi $S^c \in \mathcal{A}$;

(iii) za vsako števno družino $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ elementov iz $\mathcal{A}$ je tudi unija $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ v $\mathcal{A}$.

Elemente družine $\mathcal{A}$ imenujemo *merljive množice*. Množico X, opremljeno z družino $\mathcal{A}$, pa imenujemo *merljiv prostor*. Merljiv prostor je torej par $(X, \mathcal{A})$. Če namesto pogoja (iii) zahtevamo šibkejši pogoj:

(iii') unija vsake končne poddružine v $\mathcal{A}$ je element v $\mathcal{A}$,

pravimo, da je $\mathcal{A}$ *algebra* na X.

Iz pogojev (i) in (ii) takoj sledi, da je $\emptyset \in \mathcal{A}$ za vsako σ-algebro $\mathcal{A}$ na X. Z uporabo De Morganovega zakona $\cap_i A_i = (\cup A_i^c)^c$ sledi naslednja trditev:

TRDITEV 1.1.2. *Vsaka σ-algebra $\mathcal{A}$ je zaprta za števne preseke: če je $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ poljubno zaporedje množic iz $\mathcal{A}$, je $\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*

ZGLED 1.1.3. Naj bo X poljubna neprazna množica.

(i) Družina z dvema elementoma $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra, vsebovana v vsaki σ-algebri na X.

(ii) Potenčna množica $\mathbb{P}(X)$ je σ-algebra, ki vsebuje vsako σ-algebro na X.

(iii) Družina vseh podmnožic A v X, za katere je bodisi A bodisi A^c števna množica, je σ-algebra, ki je različna od $\mathbb{P}(X)$, če X ni števna.

Naloge

1. Pokaži, da je vsaka σ-algebra algebra.

2. Kaj je najmanjša σ-algebra na X, ki vsebuje dano neprazno podmnožico $A \subseteq X$? Kaj pa najmanjša σ-algebra, ki vsebuje dve različni neprazni podmnožici v X?

3. Pokaži: če je $\mathcal{A}$ algebra množic, je $S \setminus T \in \mathcal{A}$ za poljubni množici $S, T \in \mathcal{A}$.

4. Naj bo X neskončna množica, $\mathcal{A}$ pa družina vseh tistih podmnožic v X, ki so bodisi končne bodisi imajo končen komplement. Je $\mathcal{A}$ σ-algebra? Je algebra?

5. Naj bo $f : X \to Y$ preslikava med nepraznima množicama, $\mathcal{B}$ pa poljubna σ-algebra na Y. Dokaži, da je tedaj $\{f^{-1}(B) \colon B \in \mathcal{B}\}$ σ-algebra na X.

Ali je za vsako σ-algebro $\mathcal{A}$ na X družina $\{f(A) \colon A \in \mathcal{A}\}$ σ-algebra na Y? Kaj pa, če je f surjektivna (bijektivna) preslikava?

* **6.** Pokaži, da vsaka neskončna σ-algebra $\mathcal{A}$ vsebuje neskončno družino paroma disjunktnih množic, in sklepaj od tod, da mora imeti $\mathcal{A}$ moč, večjo ali enako kontinuumu.

7. Naj bo $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$ poljubna družina σ-algeber na množici X. Pokaži, da je tedaj tudi $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} \mathcal{A}_\alpha$ σ-algebra na X.

1.2. Borelove množice

Definicija 1.2.1. Naj bo $\mathcal{B}$ poljubna družina podmnožic dane neprazne množice X. Presek vseh tistih σ-algeber na X, ki vsebujejo družino $\mathcal{B}$, imenujemo *σ-algebra, generirana z $\mathcal{B}$*. To je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{B}$.

V primeru, ko je X topološki prostor in $\mathcal{O}$ družina vseh odprtih podmnožic v X, imenujemo σ-algebro, generirano z $\mathcal{O}$, *Borelova σ-algebra*, njene elemente pa *Borelove množice*. Označili jo bomo z $\mathcal{B}(X)$.

Presek števne družine odprtih množic v topološkem prostoru je torej Borelova množica; take množice imenujemo *G_δ-množice.* Prav tako je unija vsakega zaporedja zaprtih podmnožic Borelova množica; tako množico imenujemo *F_σ-množica.*

Naloge

1. Pokaži, da so polodprti intervali Borelove podmnožice v $\mathbb{R}$, in sicer tako F_σ kot tudi G_δ.

2. Ali zvezna preslikava med topološkima prostoroma vedno preslika odprte množice v Borelove?

* **3.** Koliko je moč družine vseh Borelovih podmnožic v $\mathbb{R}$?

4. Rečemo, da je σ-algebra $\mathcal{A}$ na prostoru X *števno generirana*, če obstaja kaka taka števna družina $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, da je $\mathcal{A}$ enaka σ-algebri, generirani s $\mathcal{C}$. Pokaži, da je Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ števno generirana (za vsak $n \in \mathbb{N}$). Splošneje pokaži, da je Borelova σ-algebra na topološkem prostoru s števno bazo števno generirana.

Odslej bo oznaka $(X, \mathcal{A})$ pomenila merljiv prostor, z velikimi pisanimi črkami $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... pa bomo označevali σ-algebre.

1.3. Pozitivna mera

Zgledi pozitivnih mer so: dolžina podmnožic v $\mathbb{R}$, ploščina ravninskih likov, prostornina teles v prostoru. Ta pojem želimo posplošiti na poljubne merljive prostore.

Definicija 1.3.1. *Pozitivna mera* (ali tudi kar *mera*) na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je funkcija
$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty],$$
ki zadošča pogojema

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ in

(ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

za vsako zaporedje disjunktnih množic $A_n \in \mathcal{A}$. Trojko $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bomo imenovali *prostor z mero*.

Pogoju (ii) pravimo *števna aditivnost* ali *σ-aditivnost*. Če vzamemo v tem pogoju, da so od nekega $N \in \mathbb{N}$ naprej vse množice prazne, torej $A_n = \emptyset$ za $n > N$, dobimo, da je
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$
za vsako končno družino disjunktnih podmnožic A_n iz $\mathcal{A}$. Ta pogoj imenujemo *končna aditivnost*.

Zgled 1.3.2. Naj bo X poljubna neskončna množica, $\mathcal{A}$ pa njena potenčna množica. Za vsak $A \in \mathcal{A}$ naj bo
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{če je } A \text{ končna} \\ \infty, & \text{sicer.} \end{cases}$$
Potem je μ končno aditivna funkcija, ki ni števno aditivna.

Definicija 1.3.3. Pozitivno mero μ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ imenujemo *končna mera*, če je $\mu(X) < \infty$. Če pa se da X izraziti kot unija kake števne družine množic iz $\mathcal{A}$, ki imajo končno mero, pravimo, da je μ *σ-končna mera*. Števni uniji množic, na katerih je μ končna, pravimo *σ-končna množica* glede na mero μ.

TRDITEV 1.3.4. *Končno aditivna pozitivna funkcija je monotona: za vsaki množici $A \subseteq B$ iz $\mathcal{A}$ je $\mu(A) \le \mu(B)$.*

DOKAZ. Ker sta množici A in $B \setminus A$ disjunktni in merljivi z unijo B, je

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A).$$

□

TRDITEV 1.3.5. *Za vsako pozitivno mero μ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in poljubno zaporedje $(A_j) \subseteq \mathcal{A}$ je*

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

DOKAZ. Opazimo, da je $A := \bigcup_j A_j$ unija zaporedja disjunktnih množic

$$A_1,\ A_2 \setminus A_1,\ A_3 \setminus (A_1 \cup A_2),\ \ldots,$$

ki so vse v $\mathcal{A}$. Po števni aditivnosti in monotonosti sledi od tod

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) + \ldots \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

□

TRDITEV 1.3.6. *Končno aditivna funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je mera natanko tedaj, ko za vsako naraščajoče zaporedje*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$$

množic iz $\mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{1.3.1}$$

DOKAZ. Označimo unijo na levi strani formule (1.3.1) z A. Množica A je unija zaporedja disjunktnih množic $A_1,\ A_2 \setminus A_1,\ A_3 \setminus A_2,\ \ldots$ Unija prvih n množic v tem zaporedju pa je A_n, torej $\mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_{j+1} \setminus A_j)$. Če je μ mera (torej števno aditivna), sledi od tod, da je

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{j+1} \setminus A_j) \\
&= \lim_n \left(\mu(A_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_{j+1} \setminus A_j)\right) = \lim_n \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Za dokaz v obratno smer naj bo (B_n) poljubno zaporedje disjunktnih množic iz $\mathcal{A}$. Za vsak n naj bo

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} B_j.$$

Potem je (A_n) naraščajoče zaporedje množic iz $\mathcal{A}$ z unijo, enako uniji vseh množic B_j, zato iz pogoja (1.3.1) in končne aditivnosti sledi

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) &= \lim_n \mu(A_n) \\ &= \lim_n \mu(\bigcup_{j=1}^{n} B_j) = \lim_n \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).\end{aligned}$$

□

POSLEDICA 1.3.7. *Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in (A_n) padajoče zaporedje množic v $\mathcal{A}$. Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem je*

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

DOKAZ. Ker je zaporedje množic $A_1 \setminus A_n$ naraščajoče in

$$A_1 \setminus \bigcap_n A_n = A_1 \cap (\bigcap_n A_n)^c = A_1 \cap \bigcup_n A_n^c = \bigcup_n (A_1 \setminus A_n),$$

je po trditvi 1.3.6

$$\mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \lim_n \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n).$$

Ker je po predpostavki število $\mu(A_1)$ končno, ga lahko odštejemo na obeh straneh gornje enakosti in tako dobimo, kar je treba. □

Naloge

1. Naj bo X poljubna neprazna množica, $\mathcal{A}$ njena potenčna množica, $x \in X$ pa poljuben element. Pokaži, da je s predpisom

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{če je } x \in A \\ 0, & \text{če je } x \in X \setminus A \end{cases}$$

definirana pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$; imenujemo jo *Diracova mera v točki* x in označimo z δ_x.

2. Naj bo $\mathcal{A}$ potenčna množica dane množice X. Za vsak $A \in \mathcal{A}$ naj bo $\mu(A)$ število elementov množice A (ki je ∞, če je A neskončna). Pokaži, da je μ mera na $\mathcal{A}$. Imenujemo jo *mera, ki šteje točke.* Kdaj je ta mera σ-končna?

3. Pokaži z zgledom, da zaključek posledice 1.3.7 ne velja vedno, če opustimo predpostavko, da je $\mu(A_1) < \infty$.

4. Za poljubno zaporedje množic A_n v σ-algebri $\mathcal{A}$ na X definirajmo

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{j=n}^{\infty} A_j) \quad \text{in} \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j).$$

(i) Prepričaj se, da množica $\limsup_n A_n$ vsebuje natanko tiste elemente $x \in X$, ki so vsebovani v neskončno mnogo množicah A_n. Katere elemente natančno pa vsebuje množica $\liminf_n A_n$?

(ii) Naj bo μ poljubna končna pozitivna mera na $\mathcal{A}$. Pokaži, da velja:

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n) \quad \text{in}$$
$$\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

Navedi kak zgled, ko v teh ocenah ne veljata enakosti.

5. Naj bo μ taka mera na X, da ima vsaka števna unija množic s končno mero tudi končno mero. Dokaži, da lahko tedaj X napišemo kot unijo dveh disjunktnih množic K in N, kjer je $\mu(K) < \infty$, mera vsake merljive podmnožice v N pa bodisi 0 bodisi ∞. (Navodilo: Najprej dokaži, da je supremum

$$s := \sup\{\mu(A) \colon A \text{ merljiva}, \ \mu(A) < \infty\}$$

končen in da je dosežen.)

6. (Razredi Sierpińskega) Družina $\mathcal{S}$ podmnožic množice X je *razred Sierpińskega*, če velja:

(i) za poljubni množici $A \subseteq B$ iz $\mathcal{S}$ je $(B \setminus A) \in \mathcal{S}$;

(ii) unija vsakega naraščajočega zaporedja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ elementov iz $\mathcal{S}$ je tudi v $\mathcal{S}$.

Bodita μ in ν končni meri, definirani na σ-algebrah $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ prostora X. Dokaži, da je družina vseh tistih množic $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, za katere je $\nu(A) = \mu(A)$, razred Sierpińskega. Ali velja to tudi, če ena od mer ni končna?

7. Dokaži, da je razred Sierpińskega $\mathcal{S}$ na X σ-algebra natanko tedaj, ko vsebuje X in je zaprt za končne preseke. Opazi tudi, da je presek poljubne družine razredov Sierpińskega na X, ki vsebujejo dano družino $\mathcal{E}$ podmnožic množice X, spet razred Sierpińskega; to je najmanjši razred Sierpińskega, ki vsebuje $\mathcal{E}$.

***8.** Naj družina $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$ vsebuje X in naj bo zaprta za tvorbo končnih presekov: za poljubna $A, B \in \mathcal{E}$ naj bo $(A \cap B) \in \mathcal{E}$. Dokaži, da vsak razred Sierpińskega $\mathcal{S}$, ki vsebuje $\mathcal{E}$, vsebuje tudi σ-algebro $\sigma(\mathcal{E})$ generirano z $\mathcal{E}$. (Navodilo: Dokazati moramo, da najmanjši razred Sierpińskega $\mathcal{D}$, ki vsebuje $\mathcal{E}$, vsebuje tudi $\sigma(\mathcal{E})$ (in je zato enak $\sigma(\mathcal{E})$). Po 7. nalogi zadošča dokazati, da je $\mathcal{D}$ zaprt za preseke po dveh elementov. Za ta namen si pri danem $A \in \mathcal{D}$ oglejmo družino $\mathcal{D}_A := \{B \in X : A \cap B \in \mathcal{D}\}$. Preveri, da je $\mathcal{D}_A$ razred Sierpińskega, ki vsebuje $\mathcal{E}$, torej mora vsebovati $\mathcal{D}$ (ker je $\mathcal{D}$ najmanjši tak razred). Torej je $(A \cap B) \in \mathcal{D}$ za vsak $B \in \mathcal{D}$.)

9. Sklepaj iz 6. in 8. naloge naslednje: če se dve končni meri ujemata na družini $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$, ki vsebuje X in je zaprta za končne preseke, potem se ujemata tudi na σ-algebri, generirani z $\mathcal{E}$.

***10.** Posploši rezultat prejšnje naloge na mere, ki niso nujno končne: če se dve meri ujemata na družini $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$, ki je zaprta za končne preseke, in se da X pokriti s kakim naraščajočim zaporedjem $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ množic iz $\mathcal{E}$, na katerih sta obe meri končni, potem se meri ujemata na σ-algebri, generirani z $\mathcal{E}$.

1.4. Napolnitev prostora z mero

DEFINICIJA 1.4.1. Prostor z mero $(X, \mathcal{A}, \mu)$ imenujemo *poln*, če je vsaka podmnožica A katerekoli množice $N \in \mathcal{A}$ z mero $\mu(N) = 0$ merljiva, torej, če velja sklep:

$$N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0, A \subseteq N \Longrightarrow A \in \mathcal{A}.$$

Vsak merljiv prostor (X, μ) z mero μ je mogoče dopolniti do polnega prostora tako, da povečamo σ-algebro $\mathcal{A}$:

TRDITEV 1.4.2. *Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Naj bo $\mathcal{B}$ družina vseh tistih podmnožic $B \subseteq X$, ki se dajo izraziti kot $B = A \cup S$, kjer je $A \in \mathcal{A}$, S pa poljubna podmnožica kake množice $N \in \mathcal{A}$ z mero $\mu(N) = 0$. Za vsako tako množico $B \in \mathcal{B}$ naj bo*

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(A).$$

Potem je $\mathcal{B}$ σ-algebra na X, ki vsebuje $\mathcal{A}$, $\tilde{\mu}$ pa (nedvoumno definirana) mera na $\mathcal{B}$, ki se ujema z mero μ na množicah iz $\mathcal{A}$. Prostor $(X, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$ je poln prostor z mero.

DOKAZ. Najprej pokažimo, da je B σ-algebra.

Ker očitno $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, je $X \in \mathcal{B}$.

Naj bodo $B_n = A_n \cup S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ poljubne množice iz $\mathcal{B}$ in B njihova unija, kjer je $A_n \in \mathcal{A}$, $S_n \subseteq N_n$, $N_n \in \mathcal{A}$ in $\mu(N_n) = 0$ za vsak n. Potem je $B = A \cup S$, kjer je $A := \cup_n A_n$ in $S = \cup_n S_n$. Ker je $A \in \mathcal{A}$ in $S \subseteq N := \cup_n N_n$, pri čemer je $\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0$, sledi, da je $B \in \mathcal{B}$.

Naj bo $B = A \cup S \in \mathcal{B}$, kjer je $A \in \mathcal{A}$, S pa vsebovana v kaki množici $N \in \mathcal{A}$ z mero 0. Iz $A \subseteq B \subseteq A \cup N$ sledita za komplemente obrnjeni inkluziji: $A^c \cap N^c \subseteq B^c \subseteq A^c$. Označimo $C := A^c \cap N^c$ in $Z := B^c \setminus C$. Potem je $B^c = C \cup Z$, $C \in \mathcal{A}$, $Z \subseteq A^c \setminus C = A^c \setminus N^c = N \setminus A \subseteq N$ in $\mu(N) = 0$, zato je $B^c \in \mathcal{B}$.

Pokazati moramo, da je funkcija $\tilde{\mu}$ nedvoumno definirana: če je $B = A_i \cup S_i$ $(i = 1, 2)$, kjer je $A_i \in \mathcal{A}$, $S_i \subseteq N_i$ in $\mu(N_i) = 0$, potem moramo pokazati, da je $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Po eni strani je

$$A_2 \setminus A_1 \subseteq (A_2 \cup S_2) \setminus A_1 = (A_1 \cup S_1) \setminus A_1 \subseteq S_1 \subseteq N_1,$$

zato $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$. Po drugi strani pa sledi na isti način tudi $\mu(A_1 \setminus A_2) = 0$. Ker lahko A_1 razcepimo na disjunktno unijo $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2)$ in podobno A_2, sledi

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_2).$$

Dokazati moramo le še, da je funkcija $\tilde{\mu}$ števno aditivna, kar pa bomo prepustili bralcem. $\square$

Kasneje bomo spoznali, da obstaja natanko ena mera m, definirana na σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vseh Borelovih podmnožic v $\mathbb{R}$, za katero je $m([a, b]) = b - a$ za vsak interval $[a, b]$ $(a \leq b)$. Ta mera je *translacijsko invariantna*, kar pomeni, da je $m(x + A) = m(A)$ za vsako Borelovo množico $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ in vsak $x \in \mathbb{R}$. Napolnitev prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ v tej meri da σ-algebro $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, katere elemente imenujemo *Lebesgueovo merljive* v $\mathbb{R}$. Razširitev mere m na σ-algebro $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, ki je tudi translacijsko invariantna, bomo označili kar z m in imenovali *Lebesgueova mera na* $\mathbb{R}$. Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}$ je Lebesgueovo merljiva natanko tedaj, ko se da izraziti kot $A = B \cup N$, kjer je B Borelova, $N \subseteq \mathbb{R}$ pa ima Lebesgueovo mero 0.

Cantorjeva množica je zaprta (torej Borelova), ima moč kontinuuma in mero 0, zato so vse njene podmnožice Lebesgueovo merljive (so v σ-algebri $\mathcal{L}(\mathbb{R})$). Moč σ-algebre $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ je zato (vsaj) 2^c, kjer je c kontinuum. Ker je moč σ-algebre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ le kontinuum, vidimo, da napolnitev lahko zelo poveča σ-algebro.

Morda bi domnevali, da obstaja translacijsko invariantna mera, ki se ujema z dolžino na vseh intervalih in je definirana na družini vseh podmnožic v $\mathbb{R}$, vendar take mere ni.

ZGLED 1.4.3. Vpeljimo v $\mathbb{R}$ ekvivalenčno relacijo takole: $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$. (Ekvivalenčni razredi so odseki aditivne grupe $\mathbb{R}$ po podgrupi $\mathbb{Q}$, torej elementi kvocientne grupe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.) V vsakem ekvivalenčnem razredu $x + \mathbb{Q}$, kjer je $x \in [-1, 1]$, izberimo natanko en element v $(x + \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]$ (kako vemo, da je to mogoče?) in naj bo S množica, ki jo sestavljajo tako izbrani elementi (aksiom izbire). Označimo $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$. Opazimo, da so množice $r + S$ ($r \in \mathbb{Q}_1$) disjunktne in da unija te števne družine vsebuje $[-1, 1]$. (Za vsak $x \in [-1, 1]$ namreč obstaja natako en tak $y \in S$, da je $x - y =: r \in \mathbb{Q}$. Pri tem je $|r| \leq |x| + |y| \leq 2$, ker je $S \subseteq [-1, 1]$. Disjunktnost množic $r + S$ pa je posledica dejstva, da S vsebuje iz vsakega ekvivalenčnega razreda kvečjemu en element.) Ker je $S \subseteq [-1, 1]$, je $r + S \subseteq [-3, 3]$ za vsak $r \in [-2, 2]$. Če bi bila množica S merljiva za kako translacijsko invariantno mero μ, ki bi se ujemala na intervalih z običajno dolžino, bi sledilo, da je

$$2 = \mu([-1, 1]) \leq \mu(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r + S) \leq 6.$$

Toda zaradi translacijske invariantnosti so vsi členi gornje vrste enaki $\mu(r+S) = \mu(S)$. Ker je členov neskončno, vrsta konvergira le, če je $\mu(S) = 0$; toda tedaj je neenakost na levi v gornji formuli nemogoča. S tem smo pokazali, da interval $[-1, 1]$ vsebuje nemerljivo podmnožico.

Naloge

1. Modificiraj sklepanje v zgledu 1.4.3 tako, da dokažeš naslednjo trditev:

Vsaka Lebesgueovo merljiva podmnožica v $\mathbb{R}$ s pozitivno mero vsebuje kako Lebesgueovo nemerljivo podmnožico.

2. Za vsak par podmnožic $A, B \in \mathcal{A}$ v (ne nujno polnem) prostoru z mero $(X, \mathcal{A}, \mu)$ definirajmo

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B),$$

kjer je $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ simetrična razlika množic A in B. Ali je ρ metrika?

Vpeljimo v $\mathcal{A}$ ekvivalenčno relacijo $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \Delta B) = 0$ in naj bo $\tilde{\mathcal{A}}$ množica vseh ekvivalenčnih razredov. Pokaži, da je $\sim$ res ekvivalenčna relacija in da je $\tilde{\mathcal{A}}$ metrični prostor za razdaljo

$$d([A], [B]) := \rho(A, B),$$

kjer označuje $[A]$ ekvivalenčni razred, ki pripada množici A. *Ali je ta metrični prostor poln?

3. Naj bo X neštevna množica, $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, ki sestoji iz vseh množic, ki so bodisi števne bodisi imajo števen komplement, μ pa mera, definirana z

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{če je } A \text{ števna,} \\ 1, & \text{če } A \text{ ni števna.} \end{cases}$$

Ali je prostor z mero $(X, \mathcal{A}, \mu)$ poln?

4. Poišči kak zgled polnega prostora $(X, \mathcal{A}, \mu)$ z mero, ki se jo da razširiti na σ-algebro, ki strogo vsebuje $\mathcal{A}$.

1.5. Zunanja mera

S $\mathbb{P}(X)$ označujemo potenčno množico dane množice X.

Definicija 1.5.1. *Zunanja mera* na množici X je preslikava

$$\zeta : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty],$$

ki zadošča naslednjim trem pogojem:

(i) $\zeta(\emptyset) = 0$;

(ii) $\zeta(A) \leq \zeta(B)$, če je $A \subseteq B$ (to lastnost imenujemo *monotonost*);

(iii) $\zeta(\bigcup_n A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n)$ za vsako zaporedje množic $A_n \subseteq X$ (*števna subaditivnost*).

Trditev 1.5.2. *Naj bo $\mathcal{S}$ poljubna družina podmnožic neprazne množice X in naj bo $\emptyset, X \in \mathcal{S}$. Naj bo $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ poljubna taka funkcija, da je $\mu(\emptyset) = 0$. Potem je funkcija $\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$, definirana kot*

$$\mu^*(Y) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

kjer teče infimum po vseh takih števnih poddružinah $(A_j) \subseteq \mathcal{S}$, da je $Y \subseteq \bigcup_j A_j$, zunanja mera.

Dokaz. Ker je $\emptyset \in \mathcal{S}$, je $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Če sta $Z \subseteq Y$ poljubni podmnožici v X, potem vsako zaporedje $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, ki pokriva Y, pokriva tudi Z, zato mora biti $\mu^*(Z) \leq \mu^*(Y)$. Pokazati moramo le še števno subaditivnost, torej da je $\mu^*(\bigcup_n Y_n) \leq \sum_n \mu^*(Y_n)$ za vsako zaporedje podmnožic $Y_n \subseteq X$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če je $\mu^*(Y_n) = \infty$ za kak n, ni kaj dokazovati, zato vzemimo, da je $\mu^*(Y_n) < \infty$ za vsak n. Za vsak n naj bo $(A_{n,j})$ tako zaporedje v $\mathcal{S}$, ki pokriva Y_n, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n,j}) \leq \mu^*(Y_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Potem števna družina $(A_{n,j})_{n,j}$ pokriva unijo $Y := \bigcup_n Y_n$, zato je

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(Y_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y_n) + \varepsilon.$$

Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, mora biti $\mu^*(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y_n)$. □

Karateodorijev izrek bo povedal, kako vsaka zunanja mera porodi σ-algebro in mero na njej.

Definicija 1.5.3. Naj bo ζ zunanja mera na množici X. Podmnožica $A \subseteq X$ je ζ*-merljiva*, če je

$$\zeta(Y) = \zeta(A \cap Y) + \zeta(A^c \cap Y)$$

za vsako podmnožico $Y \subseteq X$. Z $\mathcal{A}_\zeta$ bomo označili družino vseh ζ-merljivih podmnožic v X.

Ker je zunanja mera subaditivna, je pogoj za ζ-merljivost množice A ekvivalenten z zahtevo, da je

$$\zeta(A \cap Y) + \zeta(A^c \cap Y) \leq \zeta(Y) \tag{1.5.1}$$

za vsako podmnožico $Y \subseteq X$. Pri tem smemo vzeti, da je $\zeta(Y) < \infty$, sicer je zahteva (1.5.1) avtomatično izpolnjena.

Izrek 1.5.4. *(Karateodorij) Za vsako zunanjo mero ζ na množici X je družina $\mathcal{A}_\zeta$ σ-algebra na X, zožitev $\zeta|\mathcal{A}_\zeta$ je mera na njej in $(X, \mathcal{A}_\zeta, \zeta|\mathcal{A}_\zeta)$ je poln prostor z mero.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da je $\mathcal{A}_\zeta$ algebra. Ker je $X^c \cap Y = \emptyset$ in $X \cap Y = Y$, pogoj ζ-merljivosti očitno velja za X, zato je $X \in \mathcal{A}_\zeta$. Za vsak $A \in \mathcal{A}_\zeta$ je očitno tudi $A^c \in \mathcal{A}_\zeta$, saj je pogoj ζ-merljivosti simetričen v A in A^c. Če sta A, B iz $\mathcal{A}_\zeta$, želimo pokazati, da je tudi $A \cup B$ v $\mathcal{A}_\zeta$, se pravi, da je

$$\zeta((A \cup B) \cap Y) + \zeta((A \cup B)^c \cap Y) \leq \zeta(Y) \tag{1.5.2}$$

za vsako podmnožico $Y \subseteq X$. Ker je $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$, lahko levo stran dokazovane neenakosti (1.5.2) napišemo kot

$$\zeta((A \cup (B \cap A^c)) \cap Y) + \zeta(B^c \cap A^c \cap Y) = \zeta((A \cap Y) \cup (B \cap A^c \cap Y)) + \zeta(B^c \cap A^c \cap Y).$$

Zaradi subaditivnosti je ta izraz manjši ali enak

$$\zeta(A \cap Y) + \zeta(B \cap A^c \cap Y) + \zeta(B^c \cap A^c \cap Y).$$

V zadnjih dveh členih te vsote lahko uporabimo neenakost (1.5.1) (za množico B namesto A in $A^c \cap Y$ namesto Y); njuna vsota je tako manjša ali enaka $\zeta(A^c \cap Y)$. Sledi, da je leva stran neenakosti (1.5.2) manjša ali enaka $\zeta(A \cap Y) + \zeta(A^c \cap Y)$, kar pa je manjše ali enako $\zeta(Y)$ po (1.5.1), ker je $A \in \mathcal{A}_\zeta$.

Ker smo pravkar dokazali, da je $\mathcal{A}_\zeta$ algebra, lahko vsako unijo števne družine množic iz $\mathcal{A}_\zeta$ izrazimo kot unijo zaporedja paroma disjunktnih množic $A_j \in \mathcal{A}_\zeta$. Če pokažemo, da je vsaka taka disjunktna unija $B := \bigcup_j A_j$ v $\mathcal{A}_\zeta$ in da velja $\zeta(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_j)$, bo $\mathcal{A}_\zeta$ σ-algebra in $\zeta|\mathcal{A}_\zeta$ mera na njej. Za vsak $n = 1, 2, \ldots$ naj bo $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Ker je $A_n \in \mathcal{A}_\zeta$, za vsako podmnožico $Y \subseteq X$ velja

$$\begin{aligned}\zeta(Y \cap B_n) &= \zeta((Y \cap B_n) \cap A_n) + \zeta((Y \cap B_n) \cap A_n^c) \\ &= \zeta(Y \cap A_n) + \zeta(Y \cap B_{n-1}).\end{aligned}$$

Z induktivnim ponavljanjem te neenakosti dobimo

$$\zeta(Y \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \zeta(Y \cap A_j), \tag{1.5.3}$$

od koder sledi, da je ζ končno aditivna na $\mathcal{A}_\zeta$ (vzamemo $Y = B_n$). Z upoštevanjem pogoja (1.5.1) in monotonosti sledi sedaj iz (1.5.3) za vsako podmnožico $Y \subseteq X$

$$\begin{aligned}\zeta(Y) &\geq \zeta(Y \cap B_n) + \zeta(Y \cap B_n^c) \geq \zeta(Y \cap B_n) + \zeta(Y \cap B^c) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \zeta(Y \cap A_j) + \zeta(Y \cap B^c).\end{aligned}$$

Ko pošljemo v tej oceni n proti ∞ in upoštevamo σ-subaditivnost, dobimo

$$\zeta(Y) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(Y \cap A_j) + \zeta(Y \cap B^c) \geq \zeta(Y \cap B) + \zeta(Y \cap B^c).$$

To dokazuje, da je $B \in \mathcal{A}_\zeta$. Če v enakost (1.5.3) vstavimo $Y = B_n$ in upoštevamo, da je $\zeta(B) \geq \zeta(B_n)$ (ker je $B_n \subseteq B$), dobimo

$$\zeta(B) \geq \sum_{j=1}^{n} \zeta(A_j).$$

Ko pošljemo v tej neenakosti n proti ∞ in nato upoštevamo še σ-subaditivnost, dobimo, da je $\zeta(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_j)$.

Dokazati moramo le še polnost: če je $N \in \mathcal{A}_\zeta$, $\zeta(N) = 0$ in $A \subseteq N$, je treba pokazati, da je $A \in \mathcal{A}_\zeta$, torej da velja (1.5.1) za vsako podmnožico $Y \subseteq X$. Ker je $A \subseteq N$ in $\zeta(N) = 0$, je tudi $\zeta(A \cap Y) = 0$ (zaradi monotonosti), zato se pogoj (1.5.1) reducira na $\zeta(A^c \cap Y) \leq \zeta(Y)$, kar pa velja po monotonosti. $\square$

Naloge

1. Naj bo $\mathcal{S} = \{\emptyset, A, X\}$, kjer je A neprazna podmnožica v X, različna od X. Naj bo $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ funkcija, definirana z $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = 1$ in $\mu(X) = c$, kjer je $c \in [1, \infty]$.

(i) Določi zunanjo mero μ^*, ki jo porodi ta funkcija μ.

(ii) Določi σ-algebro $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

2. Naj bo $\mathcal{S} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$, kjer je $A \neq \emptyset, X$ poljubna podmnožica v X, funkcija $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ pa naj bo definirana z $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = 1$, $\mu(A^c) = c$ in $\mu(X) = 1 + c$, kjer je $c \in [0, \infty]$ konstanta. Določi μ^* in $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

3. Navedi kak zgled množice X in monotone funkcije $\zeta : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty)$, ki ni (števno) subaditivna.

1.6. Razširitev mere z algebre na σ-algebro

Definicija 1.6.1. *Mera na algebri* $\mathcal{A}$ je taka funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, da je $\mu(\emptyset) = 0$ in $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ za vsako zaporedje disjunktnih množic $A_n \in \mathcal{A}$, katerih unija je element iz $\mathcal{A}$.

Ker je v tej definiciji $\mathcal{A}$ le algebra, se lahko zgodi, da $A := \bigcup_n A_n \notin \mathcal{A}$, čeprav so vse množice A_n iz $\mathcal{A}$; da bi bila mera $\mu(A)$ definirana, je treba posebej predpostaviti, da je $A \in \mathcal{A}$.

Vsako mero na algebri lahko razširimo do zunanje mere:

Izrek 1.6.2. *Naj bo μ mera na algebri $\mathcal{A}$ podmnožic kake množice X. Za vsako podmnožico $Y \subseteq X$ naj bo*

$$\mu^*(Y) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

kjer teče infimum po vseh takih zaporedjih $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, da je $Y \subseteq \bigcup_n A_n$. Tedaj je μ^* zunanja mera na X in $\mu^*(A) = \mu(A)$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Trditev 1.5.2 pove, da je μ^* zunanja mera. Za vsako množico $A \in \mathcal{A}$ je $\{A, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ zaporedje v $\mathcal{A}$, ki pokriva A, zato je $\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots = \mu(A)$. Za dokaz obratne neenakosti vzemimo poljubno zaporedje $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, katerega unija vsebuje A. Potem je A enaka uniji zaporedja disjunktnih množic $B_n := A \cap (A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}))$. Ker je μ mera na $\mathcal{A}$, je

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ker velja to za vsako zaporedje $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, ki pokriva A, sledi sedaj po definiciji funkcije μ^*, da je $\mu(A) \le \mu^*(A)$. $\square$

Izrek 1.6.3. *Naj bo $\mathcal{A}$ algebra na množici X, μ_0 mera na $\mathcal{A}$, μ_0^* zunanja mera, ki jo μ_0 porodi po izreku 1.6.2, in $\mu = \mu_0^*|\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ (kjer je $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ σ-algebra, ki jo porodi μ_0^* po Karateodorijevem izreku). Potem je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_0^*}$, poleg tega pa za vsako razširitev ν mere μ_0 in za vsako množico A iz $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ velja $\nu(A) \le \mu(A)$. Če je pri tem $\mu(A) < \infty$, je $\nu(A) = \mu(A)$. Torej je μ edina razširitev mere μ_0 na σ-algebro $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, brž ko je μ_0 σ-končna (se pravi, če je X unija kake števne družine množic iz $\mathcal{A}$ s končno mero).*

Dokaz. Naj bo $A \in \mathcal{A}$. Da bi dokazali, da je $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$, zadošča po (1.5.1) dokazati, da je $\mu_0^*(A \cap Y) + \mu_0^*(A^c \cap Y) \le \mu_0^*(Y)$ za vsako podmnožico $Y \subseteq X$, za katero je $\mu_0^*(Y) < \infty$. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ tako pokritje za Y, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) < \mu_0^*(Y) + \varepsilon.$$

Potem sta $(A_n \cap A)$ in $(A_n \cap A^c)$ pokritji za $Y \cap A$ in $Y \cap A^c$ (zaporedoma) z množicami iz $\mathcal{A}$, zato je

$$\mu_0^*(Y \cap A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n \cap A) \quad \text{in} \quad \mu_0^*(Y \cap A^c) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n \cap A^c).$$

Ko seštejemo ti dve neenakosti, dobimo

$$\begin{aligned} \mu_0^*(Y \cap A) + \mu_0^*(Y \cap A^c) &\le \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_0(A_n \cap A) + \mu_0(A_n \cap A^c)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) < \mu_0^*(Y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

ker je μ_0 aditivna na $\mathcal{A}$. Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, je $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$.

Naj bo sedaj $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in ν poljubna taka mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, da je $\nu|\mathcal{A} = \mu_0$. Za vsako števno pokritje $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ množice A je

$$\nu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Od tod sledi, da je $\nu(A) \le \mu_0^*(A) = \mu(A)$. Če je pri tem $\mu(A) < \infty$, lahko izberemo pokritje $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ za A tako, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) < \mu_0^*(A) + \varepsilon, \tag{1.6.1}$$

kjer je $\varepsilon > 0$ vnaprej podan. Za množico $B := \bigcup_n A_n$ potem velja

$$\nu(B) = \lim_N \nu(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \lim_N \mu(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \mu(B)$$

in po (1.6.1)

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) < \varepsilon.$$

(Pri tem smo upoštevali, da je $\mu_0(A_n) = \mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)$ po izreku 1.6.2, saj je $A_n \in \mathcal{A}$.) Torej je

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \leq \nu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \nu(A) + \varepsilon.$$

Ko pošljemo ε proti 0, dobimo $\mu(A) \leq \nu(A)$.

Če je μ_0 σ-končna mera, lahko izrazimo X kot unijo zaporedja disjunktnih množic $X_n \in \mathcal{A}$. Za vsako množico $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ je potem $\mu(A \cap X_n) < \infty$, od koder po že dokazanem sledi

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n) = \mu(A).$$

$\square$

Naj omenimo, da je enoličnost razširitve σ-končne mere (v izreku 1.6.3) na σ-algebro, generirano z $\mathcal{A}$, tudi posledica 9. in 10. naloge iz razdelka 1.3.

Naloge

1. Naj bo μ_0 mera na algebri $\mathcal{A}$ in μ_0^* zunanja mera, ki jo porodi μ_0. Označimo z $\mathcal{A}_\sigma$ družino vseh tistih podmnožic v X, ki se dajo izraziti kot unija kakega zaporedja množic iz $\mathcal{A}$; z $\mathcal{A}_{\sigma,\delta}$ pa družino vseh podmnožic v X, ki se dajo izraziti kot presek kakega zaporedja množic iz $\mathcal{A}_\sigma$.

(i) Pokaži, da za vsako tako podmnožico $Y \subseteq X$, za katero je $\mu_0^*(Y) < \infty$, in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka množica $A \in \mathcal{A}_\sigma$, da je $Y \subseteq A$ in $\mu_0^*(A) \leq \mu_0^*(Y) + \varepsilon$. Nato pokaži še, da obstaja taka množica $B \in \mathcal{A}_{\sigma,\delta}$, da je $Y \subseteq B$ in $\mu_0^*(B) = \mu_0^*(Y)$.

(ii) Če je mera μ_0 na $\mathcal{A}$ σ-končna, potem je podmnožica $Y \subseteq X$ μ_0^*-merljiva (torej v $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$) natanko tedaj, ko obstaja taka množica $A \in \mathcal{A}_{\sigma,\delta}$, da je $Y \subseteq A$ in $\mu_0^*(A - Y) = 0$. Sklepaj od tod, da se tedaj $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ ujema z napolnitvijo σ-algebre $[\mathcal{A}]$, generirane z $\mathcal{A}$, v meri $\mu_0^*|[\mathcal{A}]$.

2. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra na X, μ_0 mera na $\mathcal{A}$, μ_0^* pa njena razširitev do zunanje mere. Predpostavimo, da se da X izraziti kot unija kakega zaporedja takih podmnožic $X_n \subseteq X$, da je $\mu_0^*(X_n) < \infty$ za vsak n. Pokaži, da je tedaj μ_0 σ-končna mera na $\mathcal{A}$, torej da je X unija kakega zaporedja množic A_n iz $\mathcal{A}$ z $\mu_0(A_n) < \infty$.

3. Naj bo X neštevna množica, $\mathcal{A}$ algebra vseh podmnožic v X, ki so bodisi končne bodisi imajo končen komplement, μ_0 pa mera na $\mathcal{A}$, ki je enaka 0 na vseh končnih množicah, na neskončnih pa enaka ∞. Kaj je v tem primeru σ-algebra $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in kaj σ-algebra, generirana z $\mathcal{A}$?

4. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra na $\mathbb{R}$, generirana z vsemi intervali $[a, b)$ ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$), μ_0 pa mera na njej, določena z $\mu_0(\emptyset) = 0$ in $\mu_0([a, b)) = \infty$. Poišči dve različni razširitvi mere μ_0 do mere na σ-algebri, generirani z $\mathcal{A}$.

1.7. Polalgebre in polmere

Lebesgueovo mero na $\mathbb{R}$ bomo konstruirali iz dolžine intervalov. Družina vseh intervalov na $\mathbb{R}$ pa ni niti σ-algebra niti algebra. Naj bo $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R})$ družina, ki vsebuje: $\emptyset$, vse polodprte intervale oblike $[a, b)$ ter vse poltrake oblike $(-\infty, b)$ in $[a, \infty)$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tudi ta družina ni algebra, je pa polalgebra v smislu naslednje definicije:

Definicija 1.7.1. *Polalgebra* na neprazni množici X je družina $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}(X)$, ki vsebuje $\emptyset$, je zaprta za končne preseke ($A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$) in kjer se da za vsak $A \in \mathcal{S}$ množica A^c izraziti kot unija končno mnogo disjunktnih množic iz $\mathcal{S}$.

Definicija 1.7.2. *Polmera* na polalgebri $\mathcal{S}$ je funkcija $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ z naslednjimi lastnostmi:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) če so množice $A_j \in \mathcal{S}$ ($j = 1, \ldots, n$) paroma disjunktne in je njihova unija A tudi v $\mathcal{S}$, potem je $\mu(A) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$;

(iii) če je (A_j) tako zaporedje paroma disjunktnih množic $A_j \in \mathcal{S}$, da je tudi unija $A := \bigcup_j A_j$ v $\mathcal{S}$, je $\mu(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$.

Zgled 1.7.3. Na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ polzaprtih intervalov, definiranih na začetku razdelka, je s predpisom

$$\mu([a, b)) = b - a \ (b > a), \quad \mu((-\infty, b)) = \infty = \mu([a, \infty)), \quad \mu(\emptyset) = 0$$

definirana polmera. (V naslednjem razdelku bomo dokazali splošnejši rezultat, zato bomo dokaz na tem mestu opustili.)

TRDITEV 1.7.4. *Za vsako polalgebro $\mathcal{S}$ na množici X je družina $\mathcal{A}$ vseh končnih unij paroma disjunktnih elementov iz $\mathcal{S}$ algebra na X, ki vsebuje $\mathcal{S}$.*

DOKAZ. Očitno $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{S}$, torej je $\emptyset \in \mathcal{A}$. Pokazati je treba, da je $\mathcal{A}$ zaprta za tvorbo končnih unij in komplementov, kar pa je po De Morganovih zakonih ekvivalentno z zaprtostjo za končne preseke in komplemente. Naj bo torej $A = \bigcup A_i$ in $B = \bigcup B_j$, kjer so $A_i \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in B_j paroma disjunktne. Potem je $A \cap B = \bigcup_{i,j}(A_i \cap B_j)$ končna disjunktna unija in $A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$ po definiciji polalgebre. Nadalje je $A^c = \bigcap_i A_i^c$, in ker se da (po definiciji polalgebre) vsak A_i^c izraziti kot končna disjunktna unija elementov iz $\mathcal{S}$ (torej je $A_i^c \in \mathcal{A}$) in smo pravkar pokazali, da je $\mathcal{A}$ zaprta za končne preseke, sledi, da je $A^c \in \mathcal{A}$. $\square$

OPOMBA 1.7.5. Algebra $\mathcal{A}$ v trditvi 1.7.4 je očitno najmanjša algebra, ki vsebuje $\mathcal{S}$. Ta algebra je enaka tudi družini vseh končnih unij (ne nujno paroma disjunktnih) elementov iz $\mathcal{S}$.

TRDITEV 1.7.6. *Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na X, μ polmera na njej, $\mathcal{A}$ pa algebra, generirana s $\mathcal{S}$ (ki po prejšnji trditvi sestoji iz vseh končnih unij paroma disjunktnih elementov iz $\mathcal{S}$). Potem je s predpisom*

$$\tilde{\mu}(\bigcup_j A_j) := \sum_j \mu(A_j) \quad (A_j \in \mathcal{S}, A_j \text{ paroma disjunktne})$$

definirana mera na algebri $\mathcal{A}$, ki se na $\mathcal{S}$ ujema z μ.

DOKAZ. Najprej moramo pokazati, da je $\tilde{\mu}$ nedvoumno definirana: če sta $A = \bigcup A_i$ in $A = \bigcup B_j$ dva zapisa množice A kot disjunktne končne unije množic iz $\mathcal{S}$, moramo pokazati, da je $\sum_i \mu(A_i) = \sum_j \mu(B_j)$. Ker je $B_j = \bigcup_i (B_j \cap A_i)$ in so množice $B_j \cap A_i \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne, je po pogoju (ii) iz definicije polmere $\mu(B_j) = \sum_i \mu(B_j \cap A_i)$ in zato

$$\sum_j \mu(B_j) = \sum_{i,j} \mu(A_i \cap B_j).$$

Enak izraz dobimo tudi, ko na podoben način izračunamo $\sum_i \mu(A_i)$. Od tod sledi tudi, da je $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ za vsak $A \in \mathcal{S}$.

Očitno je $\tilde{\mu}$ končno aditivna in zato monotona funkcija. Naj bo $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kjer so množice A in A_j iz $\mathcal{A}$ ter so A_j paroma disjunktne. Ker je $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq A$ za vsak $n = 1, 2, \ldots$, je

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}(A_j) = \tilde{\mu}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \leq \tilde{\mu}(A).$$

Ko pošljemo n proti ∞, sledi od tod, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j) \leq \tilde{\mu}(A).$$

Za dokaz obratne neenakosti pa izrazimo vsak A_j kot končno unijo paroma disjunktnih podmnožic $B_{i,j} \in \mathcal{S}$: $A_j = \bigcup_i B_{i,j}$. Ker je $A \in \mathcal{A}$, lahko na isti način izrazimo $A = \bigcup_k C_k$, $C_k \in \mathcal{S}$. Potem je (ker je $C_k \subseteq A = \bigcup_{i,j} B_{i,j}$)

$$C_k = \bigcup_{i,j} (C_k \cap B_{i,j}) \quad \text{števna unija,}$$

pri čemer je $C_k \cap B_{i,j} \in \mathcal{S}$ (saj je $\mathcal{S}$ zaprta za končne preseke). Po pogoju (iii) iz definicije polmere sledi, da je

$$\mu(C_k) \leq \sum_{i,j} \mu(C_k \cap B_{i,j}).$$

Ker je $A_j = (\bigcup_i B_{i,j}) \cap (\bigcup_k C_k) = \bigcup_{i,k} (C_k \cap B_{i,j})$ končna unija disjunktnih množic iz $\mathcal{S}$, je $\tilde{\mu}(A_j) = \sum_{i,k} \mu(C_k \cap B_{i,j})$ in sledi

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_k \mu(C_k) \leq \sum_j \sum_{i,k} \mu(C_k \cap B_{i,j}) = \sum_j \tilde{\mu}(A_j).$$

$\square$

Opomba 1.7.7. Iz trditve 1.7.6 sledi, da je polmera števno aditivna, torej da v točki (iii) definicije 1.7.2 velja enačaj.

Naloga.* Posploši zgled polalgebre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in polmere na njej na $\mathbb{R}^n$ za $n > 1$.

1.8. Lebesgue-Stieltjesove mere

Definicija 1.8.1. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča (ne nujno strogo) z leve zvezna funkcija. Ker je f monotona, obstajata v $\overline{\mathbb{R}}$ limiti

$$f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(\infty) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (glej začetek prejšnjega razdelka) definirajmo funkcijo $\mu = \mu_f$ s predpisom

$$\mu(\emptyset) = 0, \ \mu([a,b)) = f(b) - f(a) \quad (a < b, \ a, b \in \mathbb{R}),$$
$$\mu((-\infty, b)) = f(b) - f(-\infty), \ \mu([a, \infty)) = f(\infty) - f(a).$$

Trditev 1.8.2. *Funkcija $\mu = \mu_f$ je polmera na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Ker je po definiciji $\mu(\emptyset) = 0$, moramo preveriti točki (ii) in (iii) iz definicije polmere. Točko (ii) bomo preverili za intervale, primer, ko je kaka od množic poltrak, pa pustili za vajo. Naj bo torej $[a, b)$ končna unija paroma disjunktnih intervalov oblike $[a_j, b_j)$, ki jih lahko oštevilčimo tako, da je

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \ldots < b_n = b.$$

Potem je

$$\mu([a, b)) = f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n}(f(b_j) - f(a_j)) = \sum_{j=1}^{n} \mu([a_j, b_j)).$$

Za dokaz točke (iii) iz definicije polmere bomo pokazali, da je

$$f(b) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(f(b_j) - f(a_j)) \tag{1.8.1}$$

za vsak interval $[a, b)$ in vsako zaporedje disjunktnih intervalov $[a_j, b_j)$ z unijo $[a, b)$. (Od tod sledi (iii) tudi za poltrake, pokrite z intervali. Če je namreč poltrak $[a, \infty)$ enak uniji disjunktnih intervalov oblike $[a_j, b_j)$, je v tej uniji vsebovan tudi vsak interval $[a, n)$, ki ga je mogoče izraziti kot unijo intervalov oblike $[a_j, \min\{b_j, n\})$, zato je tedaj $f(n) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(f(b_j) - f(a_j))$ za vsak n in v limiti tudi $f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(f(b_j) - f(a_j))$. Podoben sklep velja tudi za poltrake oblike $(-\infty, b)$.) Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna z leve, obstajajo taki

$$c < b \quad \text{in} \quad c_j < a_j \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

da je

$$f(c) > f(b) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad f(c_j) > f(a_j) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j} \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{1.8.2}$$

Kompakten interval $[a, c]$ je tedaj vsebovan v uniji odprtih intervalov (c_j, b_j), zato že končno mnogo teh intervalov (c_j, b_j) pokriva $[a, c]$. Točka a je vsebovana v enem od intervalov (c_j, b_j) končnega pokritja; s spremembo oznak lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je kar v prvem, torej $c_1 < a < b_1$. Če je $b_1 > c$, potem že interval (c_1, b_1) pokriva $[a, c]$. Če pa je $b_1 \leq c$, je b_1 vsebovana v enem od preostalih intervalov. Spet lahko (ko spremenimo indekse) predpostavimo, da je kar $b_1 \in (c_2, b_2)$, torej $c_2 < b_1 < b_2$. Če je $b_2 > c$, je $\{(c_1, b_1), (c_2, b_2)\}$ pokritje za $[a, c]$. V nasprotnem primeru je točka b_2 vsebovana v enem od preostalih intervalov, recimo kar v (c_3, b_3). Ker je pokritje končno, lahko tako v končno mnogo korakih najdemo take c_j, da je

$$c_1 < a \quad \text{in} \quad c_j < b_{j-1} < b_j \ (j = 2, \ldots, n), \quad c < b_n. \tag{1.8.3}$$

Sedaj imamo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}(f(b_j)-f(a_j)) &\geq \sum_{j=1}^{n}(f(b_j)-f(a_j))\\ &\geq \sum_{j=1}^{n}(f(b_j)-f(c_j))-\frac{\varepsilon}{2}\\ &= -f(c_1)+\sum_{j=1}^{n-1}(f(b_j)-f(c_{j+1}))+f(b_n)-\frac{\varepsilon}{2}\\ &\geq -f(a)+f(c)-\frac{\varepsilon}{2}\\ &\geq f(b)-f(a)-\varepsilon.\end{aligned}$$

Pri tem je druga neenakost sledila iz druge neenakosti v (1.8.2), tretja neenakost pa iz dejstev, da je f naraščajoča funkcija, $c_1 < a$, $c < b_n$ in $b_j > c_{j+1}$ (torej je $f(b_j) - f(c_{j+1}) \geq 0$). Zadnja neenakost zgoraj pa je sledila iz prve neenakosti v (1.8.2). Ker velja gornja ocena za vsak $\varepsilon > 0$, to pomeni, da je $\sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^{\infty}(f(b_j)-f(a_j)) \geq f(b)-f(a) = \mu([a, b))$, kar smo želeli dokazati. $\square$

Po trditvi 1.8.2 torej vsaka z leve zvezna naraščajoča funkcija f določa polmero μ_f na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Po trditvi 1.7.6 lahko to polmero (enolično) razširimo do mere na algebri, generirani s $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ki jo nato lahko po izreku 1.6.3 razširimo enolično do mere na σ-algebri, generirani s $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ki je očitno enaka Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}$. Razširjeno mero bomo označili kar z μ_f in jo imenovali *Lebesgue-Stieltjesova mera*, dobljena iz funkcije f. Pravzaprav izrek 1.6.3 konstruira mero na večji σ-algebri, ki jo dobimo iz $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ z napolnitvijo. Če pa je f identična funkcija ($f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$), imenujemo elemente tako dobljene polne σ-algebre $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ *Lebesgueovo merljive množice*, mero pa *Lebesgueova mera na* $\mathbb{R}$. Označimo jo kar z m. Ker je dolžina translacijsko invariantna, se pravi $m(A) = m(x + A)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, mora isto veljati tudi za vse $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Če namreč za dan $x \in \mathbb{R}$ za hip označimo z m_x mero, definirano na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, z $m_x(A) = m(x + A)$, je $m_x|\mathcal{S}(\mathbb{R}) = m|\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ker je dolžina intervalov (in poltrakov) translacijsko invariantna. Zaradi enoličnosti razširitve mere iz polalgebre na σ-algebro (kadar je mera σ-končna), sledi od tod, da se meri m_x in m ujemata na vseh Borelovih množicah, torej morata generirati tudi isto napolnitev in se na njej ujemati.

Naloge

1. Dokaži, da naraščajoči z leve zvezni funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ določata isto mero (tj. $\mu_f = \mu_g$) natanko tedaj, ko je $f - g$ konstanta.

2. Naj bo μ poljubna pozitivna končna mera na Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pokaži, da je s predpisom $f_\mu(x) := \mu((-\infty, x))$ definirana z leve zvezna omejena naraščajoča (ne nujno strogo) funkcija in je $\lim_{x\to-\infty} f_\mu(x) = 0$. Nadalje pokaži, da sta preslikavi $\mu \mapsto f_\mu$ in $f \mapsto \mu_f$ druga drugi inverzni bijekciji med množico vseh končnih pozitivnih mer μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ in množico vseh tistih z leve zveznih naraščajočih omejenih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

*Posploši nalogo na ne nujno omejene funkcije in pozitivne mere na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ki so končne na omejenih Borelovih množicah. (Funkcijo f_μ je treba tedaj definirati nekoliko drugače.)

3. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča funkcija. Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstajata leva in desna limita $g(x) := \lim_{t\to x,\ t<x} f(t)$ in $\lim_{t\to x,\ t>x} f(t)$, da je g z leve zvezna naraščajoča funkcija, funkcija $s(x) := f(x) - g(x)$ pa je različna od 0 le v števno mnogo točkah.

* **4.** Naj bo $D = \{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ grupa vseh diadičnih ulomkov za seštevanje. Pokaži: če je mera μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariantna za D (se pravi, če je $\mu(A + d) = \mu(A)$ za vsak $d \in D$ in vsako množico A iz Borelove σ-algebre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) in je $\mu([0, 1]) < \infty$, potem je μ konstanten večkratnik Lebesgueove mere.

* **5.** Ali obstaja kaka taka neničelna mera μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, da je $\mu(f(A)) = \mu(A)$ za vsako Borelovo množico $A \subseteq \mathbb{R}$ in vsako linearno funkcijo $f(x) = kx + n$ ($k > 0$, $n \in \mathbb{R}$)?

Druga poglavja niso vključena v predogled.

Knjigo je možno kupiti v prodajalni DMFA – založništva na Jadranski 21, kjer imajo študenti 20% popust.

Literatura

[1] W. Arveson, *An Invitation to C^*-algebras*, GTM **39**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[2] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
[3] M. Dobovišek, *Riemannov in Lebesgueov integral v* $\mathbb{R}^n$, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **36**, DMFA Slovenije, 1997.
[4] R. Doss, *The Hahn decomposition theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), str. 377.
[5] R. Drnovšek, *Rešene naloge iz teorije mere*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **40**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2001.
[6] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
[7] L. C. Evans in R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.
[8] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **153**, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
[9] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, J. Wiley & Sons, New York, 1999.
[10] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1995.
[11] R. M. Gray, *Probability, Random Processes, and Ergodic Properties*, 2010, `http://ee.stanford.edu/~gray/arp.html`
[12] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.
[13] M. Hladnik, *Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **16**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1985.
[14] M. Hladnik, *Moderna kvadratura kroga*, Knjižnica Sigma **59**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1995.
[15] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, GSM **15**, AMS, Providence, RI, 1997.
[16] S. Kantorovitz, *Introduction to Modern Analysis*, Oxford University Press, 2003.
[17] A. W. Knapp, *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2005.
[18] H. König, *Measure and Integration, an Advanced Course in Basic Procedures and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[19] S. Lang, *Real Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.
[20] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44**, DMFA Slovenije, 2008.
[21] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, GTM **118**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.
[23] V. Runde, *Lectures on Amenability*, LNM **1774**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
[24] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2002.
[25] M. E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, GSM **76**, AMS, Providence, R. I., 2006.

Opomba o literaturi

Poleg knjig iz teorije mere in realne analize smo našteli še nekaj del s sorodnih področij, ki gradijo na teoriji mere. Delo [**24**] obravnava vektorske mere in njihovo uporabo pri proučevanju Banachovih prostorov. V [**21**] je razvit funkcionalno analitični pristop k topološki teoriji mere, v [**10**] pa se lahko seznanimo z vlogo mere v harmonični analizi. Nekomutativna posplošitev teorije mere je teorija von Neumannovih algeber [**15**], kjer merljive množice nadomestijo projektorji, mero pa normalni linearni funkcionali. Monografija [**18**] obravnava novejšo, zelo abstraktno razširitev teorije integracije. Osnove teorije verjetnosti so z analitičnega stališča razložene npr. v [**9**] in [**16**], povezava z ergodično teorijo pa npr. v [**11**]. Knjiga [**8**] poleg osnovne teorije obravnava vlogo mere v geometriji in algebraični topologiji ter uporabo v variacijskem računu.

Stvarno kazalo

L

M

N

O

P

R

S

Š

T

U

V

X

Y

Z

PODIPLOMSKI SEMINAR IZ MATEMATIKE

Izdajajo: Oddelek za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
DMFA – založništvo

Založilo: DMFA – založništvo

Odgovorni urednik Mirko Dobovišek

27.

Bojan Magajna

OSNOVE TEORIJE MERE

Strokovni pregled Martin Raič
Jezikovni pregled Janez Juvan
Računalniško stavil avtor
Tehnični urednik Matjaž Zaveršnik

© 2011 DMFA – založništvo – 1847

Natisnila tiskarna Birografika Bori v nakladi 200 izvodov
Ljubljana 2011

Cena: 19,49 EUR