Poglavje 3

PRODUKTNI PROSTORI

3.1 Produktna σ-algebra

Naj bosta $(X, \mathcal{M})$ in $(Y, \mathcal{N})$ merljiva prostora. Množico $A \times B$ v kartezičnem produktu $X \times Y$ imenujemo **merljiv pravokotnik**, kadar je $A \in \mathcal{M}$ in $B \in \mathcal{N}$. **Produktna σ-algebra** $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je najmanjša σ-algebra na produktu $X \times Y$, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.

Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Za $x \in X$ definirajmo x**-prerez** množice E kot množico $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$, za $y \in Y$ pa y**-prerez** kot $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$.

Trditev 3.1 *Če je $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, potem je $E_x \in \mathcal{N}$ za vsak $x \in X$ in $E^y \in \mathcal{M}$ za vsak $y \in Y$.*

Dokaz. Zaradi simetrije je dovolj dokazati, da je $E_x \in \mathcal{N}$ za vsak $x \in X$. Naj bo $\mathcal{D}$ družina vseh množic $E \subseteq X \times Y$, za katere je $E_x \in \mathcal{N}$ za vsak $x \in X$. Če je $E = A \times B$ za $A \in \mathcal{M}$ in $B \in \mathcal{N}$, potem je $E_x = B \in \mathcal{N}$, če je $x \in A$, in $E_x = \emptyset \in \mathcal{N}$, če je $x \notin A$. To pomeni, da $\mathcal{D}$ vsebuje vse merljive pravokotnike. Ni se težko prepričati, da je $\mathcal{D}$ σ-algebra. Zato je $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}$, s čimer je dokaz končan. $\square$

Za bolj natančen opis produktne σ-algebre potrebujemo koncept monotonega razreda. Družina $\mathcal{C}$ podmnožic neprazne množice X je **monotoni razred**, kadar veljata sklepa:

(i) če za zaporedje $\{E_n\}$ množic v $\mathcal{C}$ velja $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$, potem je $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ tudi v $\mathcal{C}$;

(ii) če za zaporedje $\{E_n\}$ množic v $\mathcal{C}$ velja $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$, potem je $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ tudi v $\mathcal{C}$.

Lema 3.2 (**Lema o monotonem razredu**) *Naj bo $\mathcal{A}$ algebra podmnožic množice X in $\mathcal{C}$ najmanjši monotoni razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{C}$ σ-algebra, torej je $\mathcal{C}$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Za $E \in \mathcal{C}$ definirajmo $\mathcal{C}_E = \{F \in \mathcal{C} : E \setminus F \in \mathcal{C}, F \setminus E \in \mathcal{C}, E \cap F \in \mathcal{C}\}$. Očitno X in $\emptyset$ pripadata $\mathcal{C}_E$. Prav tako je očitna ekvivalenca: $F \in \mathcal{C}_E \iff E \in \mathcal{C}_F$. Ni se težko prepričati, da je $\mathcal{C}_E$ monotoni razred, ker je tak $\mathcal{C}$.

Ker je $\mathcal{A}$ algebra, iz $E \in \mathcal{A}$ sledi $F \in \mathcal{C}_E$ za vse $F \in \mathcal{A}$, torej $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_E$ in zato $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_E$ za vse $E \in \mathcal{A}$. Če je torej $F \in \mathcal{C}$, potem je $F \in \mathcal{C}_E$ za vse $E \in \mathcal{A}$, od koder zaradi zgornje ekvivalence sledi $E \in \mathcal{C}_F$ za vse $E \in \mathcal{A}$. Tako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_F$ in zato $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_F$ za vse $F \in \mathcal{C}$. To pomeni, da iz $E, F \in \mathcal{C}$ sledi $E \setminus F \in \mathcal{C}$, $F \setminus E \in \mathcal{C}$ in $E \cap F \in \mathcal{C}$. Ker je $X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, je $\mathcal{C}$ algebra. Potem je $\mathcal{C}$ σ-algebra po trditvi 1.4. $\square$

Zadnjo lemo uporabimo sedaj v primeru družine $\mathcal{A}$ vseh končnih disjunktnih unij merljivih pravokotnikov. Družina vseh merljivih pravokotnikov je elementarna družina, saj velja $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ in $(A \times B)^c = (X \times B^c) \cup (A^c \times B)$. Po trditvi 1.7 je zato $\mathcal{A}$ algebra. Njene elemente imenujemo **elementarne množice**. Iz leme 3.2 sledi, da je produktna σ-algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ najmanjši monotoni razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$.

Naj bo f kompleksna funkcija na $X \times Y$. Za $x \in X$ definirajmo x**-prerez** f_x funkcije f kot kompleksno funkcijo na Y, podano s predpisom $f_x(y) = f(x, y)$. Podobno za $y \in Y$ definiramo y**-prerez** f^y funkcije f kot kompleksno funkcijo na X, podano s $f^y(x) = f(x, y)$.

Trditev 3.3 *Naj bo f kompleksna $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-merljiva funkcija na $X \times Y$. Potem je funkcija f_x $\mathcal{N}$-merljiva za vsak $x \in X$ in f^y $\mathcal{M}$-merljiva za vsak $y \in Y$.*

Dokaz. Zaradi simetrije je dovolj dokazati, da je funkcija f_x $\mathcal{N}$-merljiva za vsak $x \in X$. Naj bo U odprta množica v $\mathbb{C}$. Potem je

$$E = f^{-1}(U) = \{(x, y) : f(x, y) \in U\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}.$$

Po trditvi 3.1 je $E_x \in \mathcal{N}$ za vsak $x \in X$. Toda $E_x = \{y \in Y : f_x(y) \in U\} = f_x^{-1}(U)$, torej je funkcija f_x $\mathcal{N}$-merljiva za vsak $x \in X$. $\square$

3.2 Produktna mera

Izrek 3.4 (**mali Fubinijev izrek**) *Naj bosta $(X, \mathcal{M}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-končna merljiva prostora. Za $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ definirajmo nenegativni funkciji u in v zaporedoma na X in na Y z $u(x) = \nu(E_x)$ in $v(y) = \mu(E^y)$. Potem je u $\mathcal{M}$-merljiva, v je $\mathcal{N}$-merljiva in velja*

$$\int u \, d\mu = \int v \, d\nu \tag{3.1}$$

Ker je $\nu(E_x) = \int \chi_{E_x} d\nu = \int \chi_E(x,y) d\nu(y)$ in podobno $\mu(E^y) = \int \chi_E(x,y) d\mu(x)$, lahko enakost (3.1) zapišemo tudi v obliki

$$\int d\mu(x) \int \chi_E(x,y) d\nu(y) = \int d\nu(y) \int \chi_E(x,y) d\mu(x).$$

Dokaz. Obravnavajmo le primer končnih mer. Po trditvi 3.3 sta definiciji funkcij u in v smiselni. Naj bo $\mathcal{C}$ družina vseh $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, za katere veljajo zaključki izreka. Dokazati moramo, da je $\mathcal{C} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Če je $E = A \times B$, kjer je $A \in \mathcal{M}$ in $B \in \mathcal{N}$, potem je $u(x) = \nu(B)\chi_A(x)$, $v(y) = \mu(A)\chi_B(y)$ in oba integrala v (3.1) sta enaka $\mu(A)\nu(B)$. Torej $\mathcal{C}$ vsebuje vse merljive pravokotnike. Lahko se je prepričati, da potem $\mathcal{C}$ vsebuje vse elementarne množice. Po lemi 3.2 je zato dovolj videti, da je $\mathcal{C}$ monotoni razred. Če za zaporedje $\{E_n\}$ množic v $\mathcal{C}$ velja $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$ in je $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$, potem so funkcije $u_n(x) = \nu((E_n)_x)$ merljive in po točkah naraščajo proti funkciji $u(x) = \nu(E_x)$, ki je zato merljiva. Podobno velja za funkcije $v_n(y) = \mu((E_n)^y)$ in $v(y) = \mu(E^y)$. Z uporabo LMK dobimo

$$\int u\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n\, d\nu = \int v\, d\nu,$$

s čimer smo dokazali, da je $E \in \mathcal{C}$.

Podobno postopamo, če za zaporedje $\{E_n\}$ množic v $\mathcal{C}$ velja $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ in je $E = \cap_{n=1}^\infty E_n$. Tedaj so funkcije $u_n(x) = \nu((E_n)_x)$ merljive in po točkah padajo proti funkciji $u(x) = \nu(E_x)$, ki je zato merljiva. Podobno velja za funkcije $v_n(y) = \mu((E_n)^y)$ in $v(y) = \mu(E^y)$. Ker je $u_1(x) = \nu((E_1)_x) \le \nu(Y) < \infty$ in $\mu(X) < \infty$, je $u_1 \in L^1(\mu)$ in zato lahko v dokazu enakosti (3.1) uporabimo LDK namesto LMK. S tem smo dokazali, da je $\mathcal{C}$ monotoni razred. $\square$

Naj bosta $(X, \mathcal{M}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-končna merljiva prostora. Z vrednostjo v (3.1) definiramo **produktno mero** $\mu \times \nu$ množice $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, torej

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Pokažimo, da je $\mu \times \nu$ res mera na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Naj bo $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{M}$ in $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$. Potem je $\chi_E = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}$ in zato imamo

$$(\mu \times \nu)(E) = \int d\mu(x) \int \left(\sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}(x,y) \right) d\nu(y) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int d\mu(x) \int \chi_{E_n}(x,y)\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^\infty (\mu \times \nu)(E_n).$$

Prav tako se je lahko prepričati, da je produktna mera σ-končna. Če je namreč $X = \cup_{n=1}^\infty X_n$ in $Y = \cup_{m=1}^\infty Y_m$, kjer je $\mu(X_n) < \infty$ za vsak n in $\mu(Y_m) < \infty$ za vsak

m, potem je $X \times Y = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} X_n \times Y_m$ in $(\mu \times \nu)(X_n \times Y_m) = \mu(X_n)\nu(Y_m) < \infty$ za vsak m in n.

Izrek 3.5 (**Fubinijev izrek**) *Naj bosta $(X, \mathcal{M}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-končna merljiva prostora in f $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-merljiva funkcija na $X \times Y$.*

(a) Če je f nenegativna funkcija in če je

$$u(x) = \int f_x \, d\nu \text{ in } v(y) = \int f^y \, d\mu, \tag{3.2}$$

potem je u $\mathcal{M}$-merljiva, v je $\mathcal{N}$-merljiva in velja

$$\int u \, d\mu = \int f \, d(\mu \times \nu) = \int v \, d\nu. \tag{3.3}$$

(b) Če je $f \in L^1(\mu \times \nu)$, potem je $f_x \in L^1(\nu)$ skoraj za vsak $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ skoraj za vsak $y \in Y$, funkciji u in v iz (3.2) sta definirani skoraj povsod, $u \in L^1(\mu)$, $v \in L^1(\nu)$ in velja enakost (3.3).

Točko (a) v Fubinijevem izreku nekateri pripisujejo Tonelliju in zato izrek 3.5 imenujejo Fubini-Tonellijev izrek.

Enakost (3.3) lahko zapišemo v daljši obliki

$$\int d\mu(x) \int f(x,y) \, d\nu(y) = \int f(x,y) d(\mu \times \nu)(x,y) = \int d\nu(y) \int f(x,y) \, d\mu(x).$$

Prvi in tretji izraz sta **dvakratna integrala**, srednji pa je **dvojni integral**.

Predpostavko $f \in L^1(\mu \times \nu)$ v točki (b) običajno preverimo s pomočjo točke (a), s katero pokažemo končnost enega od dvakratnih integralov za funkcijo $|f|$.

Dokaz. Pokažimo le (a). Po trditvi 3.3 sta definiciji (3.2) smisleni. Če je $f = \chi_E$, potem (3.3) velja po malem Fubinijevem izreku. Zaradi linearnosti integrala (a) velja za vse enostavne nenegativne funkcije f. V splošnem primeru obstaja zaporedje $\{s_n\}$ enostavnih funkcij na $X \times Y$, ki po točkah narašča proti f. Če sta u_n in v_n funkciji na X in na Y, ki pripadata funkciji s_n, potem po LMK imamo najprej

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} \int (s_n)_x \, d\nu = \int f_x \, d\nu = u(x)$$

in potem še

$$\int u \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int u_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int s_n \, d(\mu \times \nu) = \int f \, d(\mu \times \nu).$$

S tem smo dokazali prvo enakost v (3.3), druga pa velja zaradi simetrije. $\square$

Naslednji primer nas prepriča, da predpostavko $f \in L^1(\mu \times \nu)$ v točki (b) ne moremo nadomestiti s predpostavko, da dvakratna integrala obstajata.

Primer 3.6 *Naj bo $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mu = \nu$ mera štetja točk. Potem je $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ in $\mu \times \nu$ mera štetja točk. Definirajmo realno funkcijo f na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s predpisom*

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{če } m = n, \\ -1 & , \quad \text{če } m = n+1, \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Potem imamo

$$\int f(m,n)\, d\nu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{če } m = 1, \\ 0 & , \quad \text{če } m > 1 \end{cases}$$

in

$$\int f(m,n)\, d\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = 0.$$

Torej je

$$\int d\mu(m) \int f(m,n)\, d\nu(n) = 1$$

in

$$\int d\nu(n) \int f(m,n)\, d\mu(m) = 0.$$

Očitno je

$$\int |f|\, d(\mu \times \nu) = \infty.$$

S primerom pokažimo še, da že v malem Fubinijevem izreku ne moremo izpustiti predpostavke o σ-končnosti mer.

Primer 3.7 *Naj bo $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M}$ Lebesguova σ-algebra, μ Lebesguova mera, $\mathcal{N} = \mathcal{P}([0,1])$ in ν mera štetja točk. Naj bo $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$. Če označimo*

$$K_n = \left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \times \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \times \left[\frac{n-1}{n}, 1\right],$$

je $D = \cap_{n=1}^{\infty} K_n$ in zato je D $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-merljiva množica. Potem je $u(x) = \nu(D_x) = \nu(\{x\}) = 1$ za vsak $x \in [0,1]$ in $\int u\, d\mu = 1$, toda $v(y) = \mu(D^y) = \mu(\{y\}) = 0$ in $\int v\, d\nu = 0$.

Če sta μ in ν polni meri, potem produktna mera $\mu \times \nu$ običajno ni polna.

Primer 3.8 *Naj bo $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{L}$ Lebesguova σ-algebra in $\mu = \nu = m$ Lebesguova mera. Izberimo neprazno množico $A \in \mathcal{L}$ z mero enako 0 in podmnožico $B \subset \mathbb{R}$, ki ni Lebesgueovo merljiva. Potem zaradi trditve 3.1 mora veljati $A \times B \notin \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$. Ker je $A \times B \subseteq A \times \mathbb{R} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ in $(m \times m)(A \times \mathbb{R}) = m(A)m(\mathbb{R}) = 0$, merljiv prostor $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, m \times m)$ potemtakem ni poln.*

Izrek 3.9 *(***Fubinijev izrek za polni meri***) Naj bosta $(X, \mathcal{M}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ polna σ-končna merljiva prostora in $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ napolnitev merljivega prostora $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Če je f $\mathcal{L}$-merljiva funkcija na $X \times Y$, potem je f_x $\mathcal{N}$-merljiva skoraj za vsak $x \in X$, f^y je $\mathcal{M}$-merljiva skoraj za vsak $y \in Y$ in zato sta funkciji u in v iz (3.2) definirani skoraj povsod. Ostali zaključki izreka 3.5 so nespremenjeni.*

3.3 Lebesgueova mera na $\mathbb{R}^n$

Naj bo $\mathcal{L}$ Lebesgueova σ-algebro na $\mathbb{R}$ in m Lebesgueova mera na $\mathcal{L}$. **Lebesgueova mera m^n na $\mathbb{R}^n$** je napolnitev produktne mere $m \times m \times \ldots \times m$, definirane na produktni σ-algebri $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}$, kjer imamo n faktorjev. Njeno domeno označimo z $\mathcal{L}^n$.

Izrek 3.10 *Za množico $E \in \mathcal{L}^n$ velja:*

(a) $m^n(E) = \inf\{m^n(U) : E \subseteq U, U \text{ odprta}\} = \sup\{m^n(K) : K \subseteq E, K \text{ komp.}\}$;

(b) $E = F \cup N = G \setminus M$, *kjer je F F_σ-množica, G G_δ-množica in* $m^n(M) = m^n(N) = 0$;

(c) za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ je $x + E \in \mathcal{L}^n$ in velja $m^n(x + E) = m^n(E)$.

Izrek 3.11 *Naj bo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ obrnljiva linearna preslikava.*

(a) Če je $E \in \mathcal{L}^n$, potem je $T(E) \in \mathcal{L}^n$ in velja $m^n(T(E)) = |\det T|\, m^n(E)$;

(b) Če je f Lebesgueovo merljiva funkcija na $\mathbb{R}^n$, potem je tudi $f \circ T$ in velja

$$\int f\, dm^n = |\det T| \int (f \circ T)\, dm^n.$$

Če je T rotacija ali zrcaljenje, je $|\det T| = 1$, torej je Lebesgueova mera m^n invariantna za rotacije in zrcaljenja.