ALGEBRE IN σ-ALGEBRE

1. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neprazni podmnožici. Dokaži, da velja $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$.

2. Naj bo X poljubna neštevna množica in
$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : \, E \text{ števna ali } E^c \text{ števen}\}.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X.
   (b) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ generirana z družino vseh singletonov iz X.

3. Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ definiramo
$$\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{1\}, \ldots, \{n\}\}).$$
   (a) Naj bo $B_n = \{n+1, n+2, \ldots\}$. Dokaži, da je množica
$$\mathcal{B}_n = \{E \subseteq \mathbb{N} : \; E \subseteq B_n^c \text{ ali } E^c \subseteq B_n^c\}$$
   enaka $\mathcal{A}_n$.
   (b) Dokaži, da je $\mathcal{A}_n$ prava podmnožica v $\mathcal{A}_m$ za $n < m$.
   (c) Dokaži, da $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ni σ-algebra.

4. Naj bo $\mathcal{S}$ σ-algebra podmnožic množice X in E dana podmnožica v X, ki ni iz $\mathcal{S}$. Pokaži, da je
$$\mathcal{M} = \{(A \cap E) \cup (B \backslash E); \; A, B \in \mathcal{S}\}$$
σ-algebra generirana z $\mathcal{S} \cup \{E\}$.

5. Naj bo $\mathcal{A}$ končna algebra na X. Dokaži, da obstajajo paroma disjunktne množice $E_1, \ldots, E_n$ v $\mathcal{A}$, da je vsak $E \in \mathcal{A}$ unija nekaterih od teh množic. Kaj lahko poveš o kardinalnosti algebre $\mathcal{A}$?

6. Naj bo $\mathcal{A}$ neskončna σ-algebra na X. Dokaži, da je kardinalnost σ-algebre $\mathcal{A}$ vsaj kontinuum.

7. Naj bo X dobro urejena množica in A neka njena neprazna podmnožica. Naj za vsak $x \in X$ velja naslednje: če je $I_x := \{y \in X : \; y < x\} \subseteq A$, potem je $x \in A$. Dokaži, da je $X = A$. To se imenuje princip transfinitne indukcije.

8. Dokaži, da obstaja neštevna dobro urejena množica X z lastnostjo, da za vsak $x \in X$ je množica I_x števna. Množica X se imenuje množica števnih ordinalov.

9. Naj bo Ω množica števnih ordinalov in X neprazna množica. Naj bo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neprazna podmnožica. Za $\alpha \in \Omega$ definirajmo naslednje:

   - če ima α predhodnika β, potem definirajmo $\mathcal{E}_\alpha$ kot množico, ki ima za elemente natanko števne unije množic iz $\mathcal{E}_\beta$ in komplemente le-teh,
   - če α nima predhodnika, definirajmo
$$\mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{E}_\beta.$$

Dokaži, da velja

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{E}_\alpha.$$

10. Določi kardinalnost Borelove σ-algebre na realni osi.