Domača naloga iz TEORIJE MERE

Naloge so enakovredne. Pri reševanju nalog si lahko pomagate z literaturo. Sodelovanje s kolegi ni dovoljeno, lahko pa se posvetujete z menoj. Rok za oddajo s kemičnim svinčnikom napisanih rešitev je **26. 4. 2007**. Prosim, da napišete tudi izjavo, da ste naloge reševali samostojno.

1. Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor in $\{\mu_n\}$ zaporedje pozitivnih mer. Funkcija μ je definirana s predpisom
$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)$$
za vsak $E \in \mathcal{M}$. Ali je μ mera? Odgovor utemelji!

2. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{2}{n}}^{1} \frac{n^2 \sin\frac{x}{n}}{nx-1} dx.$$

3. Naj bo $X = [0,1]$, μ Lebesgueova mera in $\{\varepsilon_n\}$ zaporedje pozitivnih števil. Pokaži, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ natanko takrat, ko obstaja zaporedje Lebesgueovo merljivih množic $\{A_n\} \subseteq [0,1]$, za katero je $\mu(A_n) = \varepsilon_n$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) < \infty$ skoraj povsod.

4. Naj bo m Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$. Ali zaporedje
$$f_n(x) = \chi_{[n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}]}(x)$$
konvergira k 0 skoraj povsod, skoraj enakomerno ali po meri m? Vsakega od odgovorov utemelji!

5. Naj bo X množica, katere moč je večja od moči množice naravnih števil. Naj bo σ-algebra $\mathcal{M}$ družina vseh podmnožic E množice X z lastnostjo, da je vsaj ena od množic E in E^c največ števna. Pokaži, da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ merljiva natanko takrat, kadar je f konstantna na komplementu množice, ki je končna ali števna.