Domača naloga iz TEORIJE MERE

Naloge so enakovredne. Pri reševanju nalog si lahko pomagate z literaturo. Sodelovanje s kolegi ni dovoljeno, lahko pa se posvetujete z menoj. Rok za oddajo s kemičnim svinčnikom napisanih rešitev je **21. 4. 2008**. Prosim, da napišete tudi izjavo, da ste naloge reševali samostojno.

1. Naj bo $\mathcal{S}$ σ-algebra podmnožic množice X in E dana podmnožica v X. Pokaži, da je
$$\mathcal{M} = \{(A \cap E) \cup (B \setminus E);\ A, B \in \mathcal{S}\}$$
σ-algebra, generirana z $\mathcal{S} \cup \{E\}$.

2. Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor s polno mero μ in f, g realni funkciji na X.
   (a) Naj bo f merljiva funkcija in $f = g$ skoraj povsod. Pokaži, da je tedaj tudi g merljiva funkcija.
   (b) Ali iz merljivosti funkcije $|f|$ sledi merljivost funkcije f?

3. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2} dx.$$

4. Naj bo μ končna mera na prostoru X in f realna merljiva funkcija na X. Pokaži, da je za vsako naravno število n
$$\int_X |f|^n d\mu < \infty \ \text{ in obstaja (končna) limita } \ \lim_{n\to\infty} \int_X |f|^n d\mu$$
natanko takrat, ko je $|f(x)| \leq 1$ skoraj povsod.

5. S pomočjo integrala funkcije $f(x) = x \cos x$ po primerno izbranem območju izračunaj vsoto vrste
$$\frac{1}{1 \cdot 0!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} - \frac{1}{4 \cdot 6!} + \cdots .$$