DOMAČA NALOGA IZ TEORIJE MERE

Vse naloge so enakovredne. Pri reševanju nalog si lahko pomagate z literaturo. Sodelovanje s kolegi ni dovoljeno, lahko pa se posvetujete z menoj. Rok za oddajo s kemičnim svinčnikom napisanih rešitev je 22. 4. 2009. Prosim, da napišete tudi izjavo, da ste naloge reševali samostojno.

1. Naloga. Naj bo X neprazna množica, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$ neke njene podmnožice in $\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$ najmanjša σ-algebra na X, ki vsebuje vse množice $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označimo z $\{0,1\}^n$ množico vseh binarnih n-teric, tj. $\{0,1\}^n := \{(\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_n) \ : \ \delta_i \in \{0,1\}$ za vsak $i\}$. Za vsak i označimo še $A_i(0) := A_i^c$ in $A_i(1) := A_i$, za $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ pa naj bo $A_{\vec{\delta}} := \bigcap_{i=1}^n A_i(\delta_i)$. Pokaži, da velja

$$\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) = \left\{ E \subseteq X \ : \ E = \bigcup_{\vec{\delta} \in J} A_{\vec{\delta}} \ , J \subseteq \{0,1\}^n \right\}.$$

Pri dokazovanju je potrebno utemeljiti vsak korak.

2. Naloga. Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor s tako pozitivno mero, da velja $\mu(X) = 1$. Naj za množice $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ velja $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) > n - 1$. Pokaži, da je potem $\mu(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$.

3. Naloga. Izračunaj limito

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{n\sqrt{x}}{1 + n + nx} \, e^{-\frac{x}{n}} dx.$$

4. Naloga. Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Naj bo $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ zaporedje merljivih množic. Označimo $B := \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n$.

(a) Pokaži, da velja

$$B = \{x \in X \ : \ x \in A_n \text{ za neskončno število } n\}.$$

(b) Pokaži, da iz $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$ sledi $\mu(B) = 0$.

5. Naloga. Naj za funkcijo $\psi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ velja $\sum_{k=1}^\infty \psi(k) < \infty$. Naj bo E množica vseh takih števil $x \in [0,1]$, da za neskončno naravnih števil q, obstaja tako celo število p, da je $0 \le p \le q$, poleg tega pa velja $|x - \frac{p}{q}| < \frac{\psi(q)}{q}$. S pomočjo 4. naloge pokaži, da je množica E Lebesgueovo merljiva, njena Lebesgueova mera $m(E)$ pa je enaka 0.

Pomoč: Za fiksen q definiraj množico

$$E_q = \{x \in [0,1] \ : \ \exists p \in \mathbb{Z}, \ 0 \le p \le q, \ |x - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{\psi(q)}{q}\},$$

nato pa pokaži, da je $m(E_q) \le 2\psi(q)$.