Integral

1. Naj bo X neprazna množica in $x \in X$. Po definiciji izračunaj integral nenegativne merljive funkcije f glede na Diracovo mero δ_x.

2. Izračunaj
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{n^2 \cos^2 \frac{x}{n}}{n^2x^2 + 2nx + n^2 + 1} dx.$$

3. Izračunaj
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^n (n^2x - 1)e^{-n^2x^2} dx.$$

4. Za $0 < a < b < 1$ izračunaj
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-\frac{x}{n}} \sqrt{\frac{n-1}{1+n-nx^2}}\, dx.$$

5. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje merljivih funkcij. Če je $\int_X f_1 d\mu \in \mathbb{R}$, dokaži
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$
Ali trditev velja, če noben integral ni končen.

6. Izračunaj
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\frac{n}{n+x}\right)^n dx.$$

7. Izračunaj vsoto naslednje vrste.
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

8. Naj bo $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ merljiv prostor, opremljen z mero štetja točk in naj bo f nenegativna funkcija na $\mathbb{N}$. Dokaži, da je
$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

9. Naj bo dano dvojno zaporedje $\{a_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$. Dokaži
$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_{nm} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{nm}.$$

10. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $f : X \to \mathbb{R}$ taka nenegativna funkcija, da velja $\int_X f d\mu < \infty$. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $E \in \mathcal{A}$ s končno mero, da velja
$$\int_E f d\mu > \int_X f d\mu - \epsilon.$$

11. Izračunaj
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}dx.$$

12. Izračunaj
$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx.$$

13. Naj bo dano zaporedje nenegativnih merljivih funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki po točkah konvergira proti 0. Naj za vsako naravno število n velja
$$\int_X \max\{f_1,\dots,f_n\}d\mu \le M,$$
kjer je $M>0$ neka konstanta. Izračunaj $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

14. Naj bo $(X,\mathcal{A})$ merljiv prostor s končno pozitivno mero μ. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

    (a) Če zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira enakomerno proti funkciji f, dokaži, da je
    $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
    in $f\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

    (b) Ali trditev iz (a) velja tudi v primeru, ko je mera prostora X neskončna?

15. Naj bo $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero μ, ki šteje točke. Naj bo $f\in L^1(\mathbb{N},\mu)$. Izračunaj integral $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.

16. Naj zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\|\cdot\|_1$-normi konvergira proti funkciji f. Če je zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno, dokaži, da obstaja množica N z mero 0 in $\|f|_N\|_\infty<\infty$.

17. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje skoraj povsod nenegativnih merljivih funkcij, ki v $\|\cdot\|_1$-normi konvergira proti funkciji f. Dokaži, da je f skoraj povsod nenegativna.

18. Naj bo $f:X\to[0,\infty]$ merljiva funkcija na σ-končnem merljivem prostoru X. Če velja $\int_A f d\mu = 0$ za vsako množico A s končno mero, dokaži, da je $f=0$ skoraj povsod na X.

19. Dokaži, da je omejena Riemannovo integrabilna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tudi Lebesgueovo integrabilna in velj
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

20. Naj bo $0<a<b<1$. Dokaži zvezo
$$\int_a^b \frac{\arcsin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\arcsin(bx)-\arcsin(ax)}{x}dx.$$

21. Naj velja $a,b>0$. Izračunaj integral
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx.$$

22. S pomočjo dvojnega integrala funkcije $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ izračunaj integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

23. S pomočjo primerno izbrane funkcije dveh spremenljivk na primerno izbranem območju izračunaj

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right).$$

24. Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-končna merljiva prostora. Za funkciji $f \in L^1(X, \mu)$ in $g \in L^1(Y, \nu)$ definirajmo funkcijo $h : X \times Y \to \mathbb{C}$ s predpisom $h(x,y) = f(x)g(y)$. Dokaži, da je $h \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$ in velja

$$\int_{X\times Y} hd(\mu \times \nu) = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu.$$

25. Izračunaj

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(Namig: $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$.)

26. Naj bosta μ in ν meri štetja točk na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Definirajmo $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & : \ m = n \\ -1 & : \ m = n+1 \\ 0 & : \ \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Izračunaj oba dvakratna integrala.

(b) Ali je $f \in L^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mu\times\nu)$?

27. Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ σ-končen merljiv prostor in f_1, f_2 taki merljivi funkciji na X, da velja $f_1 \leq f_2$. Naj bo E merljiva podmnožica v X. Dokaži, da je množica

$$\{(x,y) \in E \times \mathbb{R} : \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

merljiva množica z mero

$$\int_E (f_2 - f_1) d\mu.$$

(Opomba: Realno os opremimo z Lebesgueovo mero.)

28. Naj bo $\{a_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dvojno kompleksno zaporedje, za katerega velja

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty |a_{nm}| < \infty.$$

Dokaži, da velja

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_{nm} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{mn}.$$