

KOMPLEKSNE MERE

1. Ali je Lebesgueova mera na realni osi totalna variacija kakšne kompleksne mere?
2. Naj bo μ kompleksna mera na (X, \mathcal{A}) in definirajmo $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ s predpisom

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^n \text{ končno razbitje za } E \right\}.$$

Dokaži, da je $\lambda = |\mu|$.

3. Naj bo realna \mathbb{R} os opremljena z Borelovo σ -algebro \mathcal{B} . Ali na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ obstaja taka kompleksna mera μ , da za vsako iracionalno število x velja $\mu((-\infty, x)) \neq \mu((-\infty, x])$? Odgovor dobro utemelji!
4. Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. Za poljubno podmnožico $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo

$$\lambda(E) = \sum_{n \in E} a_n.$$

- (a) Določi potreben in zadosten pogoj, da je λ realna mera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
 - (b) Določi kak Hahnov razcep mere v primeru, ko je λ realna mera.
 - (c) Kdaj je Hahnov razcep enolično določen?
5. Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru (X, \mathcal{A}) in naj bo $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija. Na σ -algebri \mathcal{A} definirajmo realno mero

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu.$$

Določi taki končni pozitivni meri μ_1 in μ_2 , da velja $\mu_f = \mu_1 - \mu_2$ in $\mu_1 \perp \mu_2$.

6. Na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definiramo kompleksno mero s predpisom

$$\lambda(E) = \sum_{k \in E} e^{ik} 2^{-|k|}$$

in pozitivno mero

$$\mu(E) = \sum_{k \in E \cap \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}.$$

- (a) Določi $|\lambda|$ in $\|\lambda\|$.
 - (b) Določi Lebesgueov razcep mere λ glede na mero μ .
 - (c) Določi Radon-Nikodymov odvod mere λ_a po meri μ .
7. Naj bo \mathcal{A} najmanjša σ -algebra podmnožic v \mathbb{Z} , da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $\{-k, k\} \in \mathcal{A}$. Definirajmo kompleksno mero μ na \mathcal{A} s predpisom

$$\mu(E) = \sum_{k \in E} \left(\frac{1+i}{2} \right)^{|k|}.$$

- (a) Izračunaj $\mu(\mathbb{Z})$, $|\mu|$ in $\|\mu\|$.
- (b) Izračunaj Radon-Nikodymov odvod $\frac{d\mu}{d|\mu|}$.
- (c) Ali je katera od funkcij $f(x) = \cos x$ in $g(x) = \sin x$ merljiva?