# Konvergenca merljivih preslikav

1. Naj bo $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremljen z mero štetja točk. Naj bo $f_n = \chi_{\{n,n+1,\ldots\}}$.

   (a) Pokaži, da $f_n$ konvergira proti 0 po točkah.

   (b) Ali $f_n$ konvergira po meri proti 0?

   (c) Ali $f_n$ konvergira proti 0 skoraj enakomerno?

2. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk.

   (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti $f$ natanko takrat, ko konvergira po točkah.

   (b) Če zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti funkciji $f$, potem konvergira tudi skoraj enakomerno, kar je ekvivalentno enakomerni konvergenci v tem primeru.

   (c) S protiprimerom pokaži, da konvergenca po točkah ne implicira enakomerne konvergence oziroma konvergence po meri.

3. Naj bo podano zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realnih števil. Za vsako naravno število $n$ definirajmo funkcijo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f_n(x) = a_n \chi_{[-n,n]}(x)$.

   (a) Poišči potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti ničelni funkciji.

   (b) Poišči potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po Lebesgueovi meri proti ničelni funkciji.

4. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero $\mu$ in naj bo dano zaporedje merljivih množic $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ s končno mero. Za vsak $m \in \mathbb{N}$ definirajmo nenegativno funkcijo $f_m : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ s predpisom
$$f_m(n) = \frac{1}{m}\mu(A_n).$$

   (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti 0.

   (b) Če je $\mu(X) < \infty$, dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno.

   (c) Ali zaporedje $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno tudi v primeru, ko je $\mu(X) = \infty$?

5. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero $\mu$ in naj zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti merljivi funkciji $f$ skoraj enakomerno.

   (a) Dokaži, da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti $f$.

   (b) Dokaži, da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti $f$,

6. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj zaporedji $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih funkcij zaporedoma konvergirata po meri k ničelni funkciji. Dokaži, da $f_n + g_n$ ter $f_n g_n$ pravtako konvergirata po meri k ničelni funkciji.

7. **(Jegorov)** Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij na merljivem prostoru $X$ s končno mero.

(a) Zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ po točkah konvergira proti $f$ natanko takrat, ko zaporedje $\{f_n - f\}_{n\in\mathbb{N}}$ po točkah konvergira proti 0.

(b) Naj $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti 0. Definirajmo

$$A_{k,m} = \{x \in X : |f_n(x)| \leq \frac{1}{m}, \forall n \geq k\}.$$

Dokaži, da je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,m} = X$ za vsak $m \in \mathbb{N}$ in $A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m}$.

(c) Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $k_m$, da je $\mu(A_{k_m,m}) \geq \mu(X) - \frac{\epsilon}{2^m}$.

(d) Naj bo $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{k_m,m}$. Dokaži, da je $\mu(A^c) \leq \epsilon$ in da $f_n$ konvergira enakomerno proti 0 na $A$.

(e) Če $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti funkciji $f$, dokaži, da konvergira tudi skoraj enakomerno.

8. Ali izrek Jegorova velja tudi v primeru, ko mera prostora $X$ ni končna?

9. Naj bo $X$ merljiv prostor s končno pozitivno mero $\mu$ in naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki skoraj povsod konvergirajo proti merljivi funkciji $f$. Dokaži, da $f_n$ konvergira po meri proti $f$.

10. **(Dini)** Naj bo $X$ kompakten topološki prostor in $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje zveznih funkcij, ki narašča proti zvezni funkciji $f$. Dokaži, da $f_n$ konvergira enakomerno proti $f$.