Lebesgue-Stieltjesova mera

1. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča z leve zvezna funkcija. Na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definirajmo preslikavo $\mu = \mu_f$ s predpisom

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu([a, b)) = f(b) - f(a)\, (a < b,\, a, b \in \mathbb{R})$$

$$\mu((-\infty, b)) = f(b) - f(-\infty),\, \mu([a, \infty)) = f(\infty) - f(a).$$

   Dokaži, da je μ_f polmera na polalgebri $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.

2. Naj bo E podmnožica v $[0, 1]$ z Lebesgueovo mero 1. Dokaži, da je E gosta v $[0, 1]$.

3. Določi notranjost podmnožic z Lebesgueovo mero 0 na realni osi.

4. Racionalna števila razvrstimo v zaporedje $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definirajmo

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n - 1/n^2, r_n + 1/n^2].$$

   Ali je $A = \mathbb{R}$?

5. Za poljuben $\epsilon > 0$ poišči tako neprazno gosto podmnožico $E \subseteq \mathbb{R}$, za katero velja $m(E) \leq \epsilon$.

6. Naj bo realna os $\mathbb{R}$ opremljena z Lebesgueovo mero m. Naj bo K neprazna kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$. Dokaži naslednji trditvi:
   (a) $m(K) < \infty$.
   (b) Če je $0 < \lambda < m(K)$, potem obstaja taka kompaktna podmnožica L v K, da je $m(L) = \lambda$.

7. Naj bo f z leve zvezna naraščajoča funkcija in μ_f pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera. Dokaži, da je f zvezna v $a \in \mathbb{R}$ natanko takrat, ko je $\mu_f(\{a\}) = 0$.