Merljive preslikave

1. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ trivialna σ-algebra na X. Poišči vse merljive preslikave $f : X \to \mathbb{R}$. Dokaži, da je vsaka preslikava $f : X \to \mathbb{R}$ merljiva, če X opremimo s potenčno σ-algebro.

2. Dokaži, da je funkcija
$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & : \quad z \neq 0 \\ 0 & : \quad z = 0 \end{cases}$$
Borelovo merljiva funkcija.

3. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija z največ števno zalogo vrednosti. Pokaži, da je f merljiva natanko takrat, ko je za vsak $c \in \mathbb{R}$ množica $\{x \in X : \ f(x) = c\}$ merljiva v X. Ali trditev še vedno velja, če izpustimo predpostavko, da ima funkcija števno zalogo vrednosti?

4. Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora ter f preslikava med njima. Če je $\mathcal{B}$ generirana z družino $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, dokaži, da je f merljiva natanko takrat, ko je $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ za vsako množico $F \in \mathcal{F}$.

5. Naj bosta X in Y topološka prostora in $f : X \to Y$ odprta injektivna preslikava. Dokaži $f(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{B}_Y$.

6. Naj bo f odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$. Dokaži, da je f' Lebesgueovo merljiva.

7. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ njegova napolnitev. Če je funkcija f $\tilde{\mathcal{A}}$-merljiva, pokaži, da obstaja taka $\mathcal{A}$-merljiva funkcija g, ki je enaka funkciji f skoraj povsod glede na mero $\tilde{\mu}$.

8. Naj bodo dani merljivi prostori $(X,\mathcal{A}_j)$ in merljive preslikave $f_j : X_j \to \mathbb{R}$. Dokaži, da je preslikava $f : X_1 \times \cdots X_n \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n)$$
merljiva glede na produktno σ-algebro $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

9. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih množic. Dokaži, da je množica vseh takih točk $x \in X$, da zaporedje $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira, merljiva.

10. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ poln merljiv prostor in g merljiva realna funkcija. Če je funkcija g enaka funkciji f skoraj povsod na X, dokaži, da je tudi f merljiva. Kaj pa v primeru, če prostor ni poln?