Pozitivne mere

1. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor s pozitivno mero μ. Dokaži, da za množici A in B iz $\mathcal{A}$ velja naslednje:

   (a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

   (b) Če je $\mu(X) = 2$, $\mu(A), \mu(B) > 1$, potem je $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Naj bo X poljubna neštevna množica in

   $$\mathcal{A} = \{E \subseteq X :\ E \text{ števna ali } E^c \text{ števen}\}.$$

   Definirajmo μ s predpisom

   $$\mu(E) = \begin{cases} 0; & E \text{ števna} \\ 1; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Dokaži, da je μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

3. Naj bosta μ_1 in μ_2 končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da predpis

   $$\lambda(A) = \sup\{\mu_1(B) + \mu_2(A \backslash B) :\ B \subseteq A,\ B \in \mathcal{A}\}$$

   definira končno pozitivno mero na $(X, \mathcal{A})$. Če za končno pozitivno mero ν na $(X, \mathcal{A})$ velja $\nu \geq \mu_1, \mu_2$, dokaži, da velja $\nu \geq \lambda$.

4. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ tak merljiv prostor s pozitivno mero μ, da je $\mu(X) = \infty$. Naj za vsako množico $F \in \mathcal{A}$ z $\mu(F) = \infty$ obstaja taka merljiva množica $E \subseteq F$, da je $0 < \mu(E) < \infty$. Dokaži, da za poljuben $c > 0$ obstaja taka množica G s končno mero, da je $\mu(G) \geq c$. Mera s to lastnostjo se imenuje semi-končna.

5. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tak merljiv prostor, da velja $\mu(X) = 1$. Naj bo dano tako zaporedje $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih množic, da je 1 stekališče zaporedja $\{\mu(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dokaži, da za vsak $0 < \epsilon < 1$ obstaja podzaporedje $\{E_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, da velja

   $$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > \epsilon.$$

6. Dokaži, da je vsaka σ-končna pozitivna mera μ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ semi-končna.

7. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Izberimo števno mnogo množic $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$. Dokaži, da je množica

   $$E = \{x \in X :\ x \text{ je element neskončno mnogo množic } E_n\}$$

   merljiva množica.

8. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Izberimo števno mnogo množic $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$. Naj velja

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

   Dokaži, da je skoraj vsak $x \in X$ v končno mnogo množicah E_n.

9. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor s pozitivno mero μ. Z $\mathcal{N}$ označimo družino vseh množic iz $\mathcal{A}$, ki imajo ničelno mero. Definirajmo

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \cup F : \; E \in \mathcal{A}, F \subseteq N \text{ za nek } N \in \mathcal{N}\} .$$

Dokaži, da je $\tilde{\mathcal{A}}$ σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Dokaži, da obstaja enolično določena mera $\tilde{\mu}$ na $(X, \tilde{\mathcal{A}})$, ki razširja μ. Pokaži, da je prostor $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ poln merljiv prostor.

10. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bodo $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merljive množice, za katere velja

    (a) $\mu(E_n) = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

    (b) $\mu(E_n \cap E_m) = 1$ za vsaka $n, m \in \mathbb{N}$.

    Izračunaj mero množice $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$.