Uvod v algebraično geometrijo - 2010/11

Prva domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 20. oktobra 2010. Naloge lahko oddate pisno ali jih pošljete po elektronski pošti. Dodajte tudi račune, ki jih boste naredili z računalnikom. Naloge morate izdelati samostojno in to potrditi s pisno izjavo.

V vseh nalogah, razen v zadnji, je F algebraično zaprt komutativen obseg s karakteristiko 0.

1. Naj bo I ideal v kolobarju $R = F[x_1, x_2, x_3, x_4]$ generiran z 2×2 minorji matrike
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$
in J ideal generiran z 2×2 minorji matrike
$$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$
Na R vzemimo obratno stopničasto ureditev porojeno z ureditvijo spremenljivk $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$. Poišči Groebnerjevi bazi za I in za J. Ali je polinom x_2^4 v katerem od idealov I ali J?

2. Točka na krivulji $\mathcal{C} = \mathcal{V}(p(x, y)) \subset \mathbb{A}^2$ je singularna, če je vrednost obeh odvodov $\frac{\partial p}{\partial x}$ in $\frac{\partial p}{\partial y}$ v tej točki enaka 0. S pomočjo Groebnerjeve baze poišči vse singularne točke na krivulji določeni s $p(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) + (2x - 3)^2 + (2y - 3)^2$.

3. V $\mathbb{A}^3$ sta dani dve premici parametrizirani s parametrom t:
$$l_1 = \{(t, 0, 1),\ t \in F\} \text{ in } l_2 = \{(0, 1, t),\ t \in F\}.$$
Ploskev $\mathcal{S}$ je podana kot unija premic skozi par točk, ki pripadata istemu t. Poišči implicitno enačbo za najmanjšo raznoterost, ki vsebuje $\mathcal{S}$. Pokaži, da je ta raznoterost kar enaka $\mathcal{S}$.

4. Whitneyev dežnik je ploskev $\mathcal{W}$ v $\mathbb{A}^3(F)$, ki je podana parametrično z enačbami
$$x = uv, \ y = v, \ z = u^2.$$
Poišči implicitno enačbo za najmanjšo raznoterost, ki vsebuje $\mathcal{W}$. Pokaži, da je za $F = \mathbb{C}$ ta raznoterost enaka $\mathcal{W}$, za $F = \mathbb{R}$ pa je strogo večja od $\mathcal{W}$. Katere točke niso v $\mathcal{W}$ v tem primeru?