Uvod v algebraično geometrijo - 2010/11

Druga domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 24. novembra 2010. Naloge lahko oddate pisno ali jih pošljete po elektronski pošti. Dodajte tudi račune, ki jih boste naredili z računalnikom. Naloge morate izdelati samostojno in to potrditi s pisno izjavo.

1. (*Descartesov izrek o krogih*) Dane so štiri medseboj paroma tangentne krožnice v evklidski ravnini s polmeri $|r_1|, |r_2|, |r_3|$ in $|r_4|$. Pri tem je predznak r_i negativen, če ostale tri krožnice ležijo znotraj i-te krožnice in pozitiven sicer. Pokaži, da velja

$$2\left(r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2} + r_4^{-2}\right) = \left(r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} + r_4^{-1}\right)^2.$$

2. Množico vseh kubičnih polinomov $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad $\mathbb{C}$ identificiramo z afinim prostorom $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ vseh trojic (a, b, c). Poišči enačbe za podmnožico vseh polinomov z dvojno ničlo in za množico vseh polinomov s trojno ničlo. Pokaži, da sta to zaprti množici v topologiji Zariskega. Ali je polinom $x^3 + x^2 + x + 1$ v kateri od teh dveh množic?

3. Napiši enačbe za sliko in zaprti graf racionalnih preslikav $\varrho : \mathbb{A}^4(\mathbb{Q}) \to \mathbb{A}^6(\mathbb{Q})$ podane z

$$\varrho(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{x_1x_2}, \frac{1}{x_1x_3}, \frac{1}{x_1x_4}, \frac{1}{x_2x_3}, \frac{1}{x_2x_4}, \frac{1}{x_3x_4}\right),$$

ter $\sigma : \mathbb{A}^2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ podane z

$$\varrho(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_1 + 1}, \frac{1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_2^2 + 1}\right).$$

4. Z $\mathcal{V}$ označimo zaprtje slike preslikave $\varrho : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^4$ dane s $t \mapsto (t, t^2, t^3, t^4)$. Poišči enačbe za $\mathcal{V}$ in preveri enakost $\operatorname{Im} \varrho = \mathcal{V}$. Pokaži, da druga sekantna raznoterost $Sec_2(\mathcal{V})$ zadošča enačbi

$$2x_1x_2x_3 - x_1^2x_4 + x_2x_4 - x_2^3 - x_3^2 = 0.$$

5. Dani so morfizmi $\varrho_j : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^6,\ j = 1, 2, 3 :$

$$\begin{aligned} \varrho_1(x_1, x_2) &= (x_1, 0, 0, x_2, 0, 0) \\ \varrho_2(x_1, x_2) &= (0, x_1, 0, 0, x_2, 0) \\ \varrho_3(x_1, x_2) &= (0, 0, x_1, 0, 0, x_2) \end{aligned}$$

Zvitek $\mathcal{S} = Scr(\mathbb{A}^2, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ je raznoterost definirana kot zaprtje slike morfizma $\tau : \mathbb{A}^2 \times \Delta_3 \to \mathbb{A}^3$ danega s

$$\tau(x, t) = \sum_{j=1}^{3} t_j \varrho_j(x).$$

Pokaži, da je $\mathcal{S}$ določen z 2×2 minorji matrike

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

6. V $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sta dani dve mimobežni premici l_1 in l_2. Raznoterost $\mathcal{J}$ je določena kot zaprtje slike morfizma $\sigma : l_1 \times l_2 \times \Delta_2 \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ danega z

$$\sigma(x, y, t) = t_1 x + t_2 y.$$

Pokaži, da je $\mathcal{J} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.