Uvod v algebraično geometrijo - 2010/11

Tretja domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 8. decembra 2010. Naloge lahko oddate pisno ali jih pošljete po elektronski pošti. Pri nalogah, ki jih boste naredili z računalnikom, dodajte tudi izračune. Naloge morate izdelati samostojno in to potrditi s pisno izjavo.

1. (*Algoritem za izračun noetherske normalizacije*) Z A označimo kvocientni kolobar R/I, kjer je $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ in I dan ideal v R. Iščemo take $y_1, \ldots, y_m$, da bo A končna algebra nad $F[y_1, \ldots, y_m]$. Naslednji algoritem konvergira z verjetnostjo 1:

   (a) Poišči slučajno spodnje trikotno matriko $M \in Gl_n(F)$. Naj bo $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)M$ in $N = M^{-1}$.

   (b) Naj bo J ideal dobljen iz I s substitucijo $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)N$.

   (c) Izračunaj reducirano Groebnerjevo bazo $\mathcal{G}$ za J glede na leksikografsko ureditev.

   (d) Izračunaj dimenzijo d kolobarja $F[y_1, \ldots, y_n]/J$. (*Za ta izračun ne potrebujemo izreka Noetherjeve o normalizaciji, pač pa gre izračun hitreje prek Hilbertovega polinoma, kar se bomo naučili malo kasneje.*)

   (e) Če je $\mathcal{G} \cap F[y_1, \ldots, y_d] \neq \emptyset$, potem ponovi korak (1).

   (f) Če za kak $i = d+1, \ldots, m$ v $\mathcal{G}$ ni polinoma z vodilnim monomom $y_i^{k_i}$ za nek $k_i \in \mathbb{N}$, potem ponovi korak (1).

   (g) Vrni $y_1, \ldots, y_d$. Algebra A je končna nad $F[y_1, \ldots, y_d]$.

   Uporabi algoritem za izračun noetherske normalizacije za naslenje ideale:

   - $I_1 = \langle x_2^2 - x_1^3 + x_1 \rangle$,

- $I_2 = x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2\rangle$,
- $I_3 = \langle x_1x_2x_3x_4 - 1\rangle$.

2. (a) Poišči generatorje za ideal $I : J$, če je $I = \langle (x_1+x_2)^2(x_1-x_2)(x_1+x_3^2)\rangle$ in $J = \langle (x_1 + x_3^2)^3(x_1 - x_2)(x_2 + x_3\rangle)$. Kaj je $\mathcal{V}(I : J)$?

   (b) Naj bosta I in J ideala v kolobarju $F[x_1, \ldots, x_n]$. Če je I radikalski, potem pokaži, da je tudi kvocientni ideal $I : J$ radikalski in velja $I : J = I : \sqrt{J}$.