

ČETRTA DOMAČA NALOGA

Izdelane naloge oddajte do 5. januarja 2011. Naloge lahko oddate pisno ali jih pošljete po elektronski pošti. Pri nalogah, ki jih boste naredili z računalnikom, dodajte tudi izračune. Naloge morate izdelati samostojno in to potrditi s pisno izjavo.

1. Dani sta ravninski projektivni krivulji v $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ z enačbama $X_0^2 X_2 = X_1^3$ in $X_0 X_2^2 = X_0 X_1^2 + X_1^3$. Pokaži, da obe lahko dobimo s projekcijo racionalne normalne krivulje (zvite kubike) v $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ glede na neko točko izven te krivulje.
2. Pokaži, da je vsaka projektivna raznoterost $\mathcal{V} \subset \mathbb{P}^n$ izomorfna neki projektivni raznoterosti $\mathcal{W} \subset \mathbb{P}^N$, $N = \binom{n+2}{2} - 1$, ki je definirana s samimi homogenimi polinomi stopnje 2.
3. Poišči enačbe za sliko morfizma $\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^7$, danega s

$$\phi([s_0, s_1], [t_0, t_1], [u_0, u_1]) = [s_0 t_0 u_0, s_0 t_0 u_1, s_0 t_1 u_0, s_0 t_1 u_1, s_1 t_0 u_0, s_1 t_0 u_1, s_1 t_1 u_0, s_1 t_1 u_1].$$

Preveri, da je ϕ izomorfizem na svojo sliko.

4. Dana je racionalna preslikava $\rho : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ s predpisom

$$\rho([X_0, X_1, X_2]) = [-X_0 X_1 X_2, X_0 X_1 (X_0 + X_1 + X_2), X_0 X_2 (X_0 + X_1 + X_2), X_1 X_2 (X_0 + X_1 + X_2)].$$

Poišči domeno za ρ in enačbo (enačbe) za sliko $im(\rho)$ preslikave ρ .

Preveri, da je

$$\rho : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \overline{im(\rho)}$$

biracionalna preslikava. (*Projektivno raznoterost (projektivno ploskev) $\overline{im(\rho)}$ imenujemo Cayleyeva kubična ploskev.*)

5. Pokaži, da je graf Veronesejevega morfizma $\nu_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ dan z enačbami $Y_0 X_1 - Y_1 X_0, Y_1 X_1 - Y_2 X_0$. Pri tem sta X_0, X_1 homogeni koordinati na \mathbb{P}^1 in Y_0, Y_1, Y_2 homogene koordinate na \mathbb{P}^2 . Poišči še enačbe za graf Veronesejevga morfizma $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$.

6. V \mathbb{P}^3 so dane premice $l_1 = \mathcal{V}(X_0, X_1)$, $l_2 = \mathcal{V}(X_2, X_3)$, $l_3 = \mathcal{V}(X_0 - X_2, X_1 - X_3)$ in $l_4 = \mathcal{V}(X_0 - X_3, X_1 + X_2)$. Koliko premic iz \mathbb{P}^3 seka vse štiri premice. Lahko si pomagaš s Plückerjevo vložitvijo in Plückerjevimi koordinatami.
7. Poišči Hilbertove polinome za naslednje raznoterosti:
- (a) za Grassmannovo raznoterost $Gr(2, 4) \subset \mathbb{P}^5$ vseh premic v \mathbb{P}^3 ,
 - (b) za Veronesejevo raznoterost $\nu_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$, kjer je $N = \binom{n+2}{2} - 1$,
 - (c) za Segrejevo raznoterost $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$.
8. Poišči eksplicitno formulo za aritmetični rod hiperploskve $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, katere stopnja je d .