Uvod v algebraično geometrijo - 2010/11

Peta domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 21. januarja 2011. Naloge lahko oddate pisno ali jih pošljete po elektronski pošti. Pri nalogah, ki jih boste naredili z računalnikom, dodajte tudi izračune. Naloge morate izdelati samostojno in to potrditi s pisno izjavo.

1. Izračunaj $\mu(P, \langle F, G\rangle)$ za $P = [0,0,1]$ in $F = X(Y^2 - XZ)^2 - Y^5$ ter $G = Y^4 + Y^3Z - X^2Z^2$.

2. Dana je gladka stožnica $\mathcal{S}$ z enačbo $XZ = Y^2$. Za fiksno točko P na $\mathcal{S}$ določi eksplicitno vse homogene polinome $G(X,Y,Z)$, za katere je pripadajoči delitelj (G) enak $2P$. Ali znaš poiskati take G, da je $(G) = 4P$?

3. Projektivna kubična krivulja v Weierstrassovi obliki je dana z enačbo $Y^2Z = X(X-Z)(X-\lambda Z)$, $\lambda \neq 0, 1$. Poišči glavni delitelj (f_i), $i = 1, 2$ za racionalni funkciji $f_1 = \frac{X}{Z}$ in $f_2 = \frac{Y}{Z}$.

4. Naj bo $\mathcal{C}$ gladka kubična krivulja in P, Q, R, S točke na $\mathcal{C}$. Pokaži, da za delitelje velja:

   (i) $P \sim Q$ natanko tedaj, ko je $P = Q$.

   (ii) $P + Q \sim R + S$ natanko tedaj, ko je presečišče premice skozi P in Q ter premice skozi R in S na $\mathcal{C}$. (Če je $P = Q$ ali $R = S$, vzamemo za premico tangento.)

5. Naj bo $\mathcal{C}$ gladka kubična krivulja in $\mathcal{L}$ taka premica, da je $\mathcal{C} \circ \mathcal{L} = P_1 + P_2 + P_3$, kjer so P_i, $i = 1, 2, 3$, tri različne točke. Označimo z $\mathcal{L}_i$ tangento na $\mathcal{C}$ v P_i. Točke Q_i so določene tako, da velja $\mathcal{C} \circ \mathcal{L}_i = 2P_i + Q_i$. Pokaži, da so Q_i kolinearne točke.