IME IN PRIIMEK:________________________ VPISNA ŠT.: | | | | | | | | |

PREDAVALNICA:______ VRSTA:____ SEDEŽ:____

1. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

11. februar 2011

(1) Naj za zaporedje nenegativnih realnih števil $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Dokaži, da velja neenakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{2^n}} \leq 1.$$

Poišči tako zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da bo v neenakosti veljala enakost.

(2) Naj bosta A in B normalna operatorja na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$.

(a) Dokaži, da je $AB = 0$ natanko takrat, ko je $BA = 0$.

(b) Naj bo $AB = 0$, operatorja A in B pa neničelna. Dokaži, da noben od operatorjev A in B ni niti surjektiven niti injektiven.

(3) Naj bo K kompakten operator na neskončnorazsežnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$.

(a) Dokaži, da obstaja zaporedje vektorjev $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{H}$, za katero velja $\|x_n\| \leq 1$ in $\|x_{n+1} - x_n\| \geq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pokaži, da vektor 0 leži v zaprtju množice $A = \{Kx : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$.

(4) Omejen integralski operator $K : L^2[0,1] \mapsto L^2[0,1]$ je za zvezne funkcije $f \in L^2[0,1]$ definiran s predpisom

$$(Kf)(x) = \int_0^1 \min\{x, y\} \cdot f(y)\, dy.$$

(a) Dokaži, da je K kompakten sebiadjungiran operator.

(b) Izračunaj vse lastne vrednosti in lastne vektorje operatorja K.

(c) Izračunaj normo operatorja K.

(d) Zapiši Sturm-Liouvillov problem, kateremu pripada integralski operator K.

(5) (a) Navedi Hahn-Banachov izrek za normiran prostor X.

(b) Naj bo $\mathcal{M}$ (ne nujno zaprt) podprostor Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ in f zvezen linearen funkcional na $\mathcal{M}$. Zakaj obstaja samo ena Hahn-Banachova razširitev F funkcionala f na $\mathcal{H}$? Kako je F definiran?