5. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

7. 2. 2012

(1) Naj bo $c \in (1, \infty)$. Dokaži, da je s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{c^n} \ , \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$$

definiran omejen linearen funkcional f na Hilbertovem prostoru l^2. Določi njegovo normo! Ali je f definiran tudi za $c = 1$?

(2) Dokaži, da sta podprostora

$$Y = \{x = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots) : \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

in

$$Z = \{x = (x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, \ldots) : \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

zaprta podprostora Hilbertovega prostora l^2. Določi taki množici A in B v l^2, da je $Y = A^{\perp}$ in $Z = B^{\perp}$. Ali je vsota $Y + Z$ pravi podprostor v l^2?

(3) Naj bo H sebiadjungiran operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Dokaži, da je operator $U = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ unitaren in $1 \notin \sigma_p(U)$. Izrazi operator H z operatorjem U.

(4) Na Hilbertovem prostoru l^2 je podan operator A s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots) =$$
$$= (x_1 + x_2, x_1 - x_2, (x_3 + x_4)/2, (x_3 - x_4)/2, (x_5 + x_6)/3, (x_5 - x_6)/3, \ldots).$$

(a) Izračunaj A^*.
(b) Dokaži, da je operator A kompakten.
(c) Določi in klasificiraj spekter operatorja A.

(5) Naj bo K kompakten sebiadjungiran operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Kaj pravi spektralni izrek o operatorju K? Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak kompakten sebiadjungiran operator L na $\mathcal{H}$ s samimi različnimi lastnimi vrednostmi, da je $\|K - L\| < \epsilon$.