1. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

7. 2. 2013

(1) Naj za preslikavi f in g na vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ s skalarnim produktom velja
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$
za vse $x, y \in \mathcal{V}$. Dokaži, da sta f in g linearni preslikavi.

(2) Linearen operator $A : l^2 \to l^2$ je podan s predpisom
$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (2x_2, x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_4, x_3 + 2x_5, \ldots).$$

(a) Dokaži, da je A omejen operator.
(b) Izračunaj A^*.
(c) Ali je operator A kompakten? Odgovor utemelji!
(d) Ali je operator A injektiven? Odgovor utemelji!

(3) Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor vseh polinomov stopnje največ n nad obsegom realnih števil. Dokaži, da obstaja tak polinom $q \in \mathbb{R}_n[x]$, da za vse polinome $p \in \mathbb{R}_n[x]$ velja
$$\int_0^1 p(x)dx = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

(4) Naj bo K kompakten sebiadjungiran operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Kaj pravi spektralni izrek o operatorju K?
Naj bo T tak sebiadjungiran operator na $\mathcal{H}$, da je $T^n = K$ za neko naravno število n. Dokaži, da je operator T kompakten in da torej zanj veljajo zaključki spektralnega izreka.

(5) Naj bo l^∞ Banachov prostor vseh omejenih realnih zaporedij in c njegov zaprt podprostor vseh konvergentnih zaporedij. Za vsak $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^\infty$ definirajmo
$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{n} \quad \text{in}$$
$$q(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{n}.$$

(a) Dokaži, da je preslikava p sublinearen funkcional na l^∞, preslikava q pa ne.
(b) Dokaži, da obstaja tak omejen linearen funkcional F na l^∞, da je $\|F\| = 1$, $F(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ za vsak $x \in c$ in $q(x) \le F(x) \le p(x)$ za vse $x \in l^\infty$.