1. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

27. 1. 2014

(1) Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh vektorjev $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2$, za katere obstaja tak indeks n, da je $x_k = 0$ za vse indekse $k > n$ in za vse sode indekse $k \leq n$.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{M}$ podprostor prostora l^2, vendar ni zaprt.

(b) Določi njegovo zaprtje $\overline{\mathcal{M}}$ in njegov ortogonalni komplement $\mathcal{M}^{\perp}$.

Rešitev

(a) Vektor x je v $\mathcal{M}$, če so njegove komponente od nekega n naprej enake 0 in vse sode komponente enake 0. Naj bosta x, y vektorja v $\mathcal{M}$ in λ poljuben skalar. Tedaj imata x in y vse komponente od nekod naprej enake 0 in vse sode komponente enake 0. Torej imata vektorja $x + y$ in λx od nekod naprej vse komponente enake 0 in vse sode komponente enake 0. Po definiciji sta $x + y$ in λx v $\mathcal{M}$. Torej je $\mathcal{M}$ podprostor prostora l^2. Za dokaz, da je $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{M}$, vzemimo na primer vektor

$$x = (1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, \ldots) \in l^2,$$

ki ni vsebovan v $\mathcal{M}$. Naj bo $x^{(n)}$ vektor v $\mathcal{M}$, ki ga dobimo iz vektorja x, če postavimo na 0 vse komponente od $2n$-te naprej. Potem zaporedje $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti vektorju x, saj je

$$\|x - x^{(n)}\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Torej je $x \in \overline{\mathcal{M}}$.

(b) Dokazali bomo, da je

$$\overline{\mathcal{M}} = \{x \in l^2 : \ x_{2n} = 0 \text{ za vse } n \in \mathbb{N}\}.$$

Množico, ki nastopa desno v zgornji enakosti, označimo z $\mathcal{N}$. Jasno je, da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Množica $\mathcal{N}$ je zaprt podprostor v l^2, saj je natanko ortogonalni komplement množice standardnih baznih vektorjev s sodimi indeksi. Ker je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, je tudi zaprtje množice $\mathcal{M}$ vsebovano v $\mathcal{N}$. Za dokaz obratne inkluzije pa vzemimo poljuben $x \in \mathcal{N}$ in za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$x^{(n)} = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots, x_{n-1}, 0, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ je vektor $x^{(n)}$ v $\mathcal{M}$, zaporedje $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ pa konvergira proti vektorju x, kar se vidi podobno kot v (a). Torej je $x \in \overline{\mathcal{M}}$. Ker velja

$$\mathcal{M}^{\perp} = \overline{\mathcal{M}}^{\perp},$$

je x v $\mathcal{M}^{\perp}$ natanko takrat, ko ima vse lihe komponente enake 0.

(2) Naj bo $\mathcal{C}_b([0,\infty))$ vektorski prostor vseh zveznih omejenih kompleksnih funkcij na $[0,\infty)$. Za $f,g \in \mathcal{C}_b([0,\infty))$ definiramo

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} f(x)\overline{g(x)}dx \ .$$

(a) Dokaži, da preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podaja skalarni produkt na $\mathcal{C}_b([0,\infty))$. Utemelji tudi, zakaj vrsta konvergira.

(b) Dokaži, da je zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{C}_b([0,\infty))$, definirano s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{če } \ 0 \le x \le n-1 \\ n-x & , \quad \text{če } \ n-1 \le x \le n \\ 0 & , \quad \text{če } \ n \le x \end{cases}$$

Cauchyjevo zaporedje v pripadajoči normi. Ali je v tej normi tudi konvergentno?

Rešitev

(a) Naj bosta f,g omejeni funkciji na intervalu $[0,\infty)$. Ker je

$$\left| \int_{k-1}^{k} f(x)\overline{g(x)}dx \right| \le \int_{k-1}^{k} |f(x)\overline{g(x)}|dx \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

in ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira, vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} f(x)\overline{g(x)}dx$$

konvergira absolutno. Aksiome skalarnega produkta preverimo rutinsko. Očitno velja

$$\langle f,f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} f(x)\overline{f(x)}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} |f(x)|^2 dx \ge 0,$$

saj je vrsta konvergentna z nenegativnimi členi. Če je $\langle f,f\rangle = 0$, potem je $\int_{k-1}^{k} |f(x)|^2 dx = 0$ za vse $k \in \mathbb{N}$. Odtod sledi, da je f enaka 0 na vsakem od intervalov $[k-1,k]$ in zato je f enaka nič na $[0,\infty)$.
Če je λ poljuben skalar, funkcije f,g in h pa poljubne v $\mathcal{C}_b([0,\infty))$, je

$$\langle \lambda f + g, h\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} (\lambda f + g)(x)\overline{h(x)}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} (\lambda f(x) + g(x))\overline{h(x)}dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} \lambda f(x)\overline{h(x)}dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} g(x)\overline{h(x)}dx = \lambda \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle \ .$$

Velja tudi

$$\langle f,g\rangle = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} \overline{f(x)\overline{g(x)}}dx} = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} \overline{f(x)}g(x)dx} = \overline{\langle g,f\rangle}.$$

Zakaj smo zgornje stvari pri preverjanju aksiomov skalarnega produkta lahko naredili, naj vsak sam premisli.

(b) Naj bo $n > m$. Tedaj je

$$(f_n - f_m)(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ če } 0 \leq x \leq m-1 \\ 1-m+x & , \text{ če } m-1 \leq x \leq m \\ 1 & , \text{ če } m \leq x \leq n-1 \\ n-x & , \text{ če } n-1 \leq x \leq n \\ 0 & , \text{ če } n \leq x \end{cases} .$$

Odtod sledi

$$\|f_n - f_m\|^2 = \frac{1}{m^2}\int_{m-1}^{m}(1-m+x)^2dx + \sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{j^2} + \frac{1}{n^2}\int_{n-1}^{n}(n-x)^2dx =$$

$$= \frac{1}{3m^2} + \sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{j^2} + \frac{1}{3n^2}.$$

Prvi in zadnji člen zgoraj konvergira proti 0, ko m in n rasteta čez vse meje, končna vsota pa je manjša od vsote vrste $\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$, ki konvergira proti 0, ko m raste čez vse meje. Torej je zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v $\mathcal{C}_b([0,\infty))$.

Zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ po točkah konvergira proti funkciji, ki je konstantno enaka 1. Zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti funkciji 1 tudi v normi prostora $\mathcal{C}_b([0,\infty))$, saj velja

$$\|f_n - 1\|^2 = \frac{1}{n^2}\int_{n-1}^{n}(1-n+x)^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{1}{3n^2} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in pripadajočo normo $\|\cdot\|$.

(a) Definiraj dualni prostor X^* normiranega prostora X.

(b) Naj za poljuben zvezen linearen funkcional $f : X \to \mathbb{F}$ obstaja tak vektor $y \in X$, da za vse $x \in X$ velja

$$f(x) = \langle x, y\rangle .$$

Dokaži, da je X Hilbertov prostor.

Rešitev

(a) Dualni prostor X^* normiranega prostora X je definiran kot vektorski prostor vseh omejenih linearnih funkcionalov na X.

(b) Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyevo zaporedje v X. Tedaj za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \geq n_0$ velja

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo preslikavo f_n na X z $f_n(x) = \langle x, x_n\rangle$. Preslikava f_n je linearna in omejena, saj velja $\|f_n\| = \|x_n\|$. Ker je $(f_n - f_m)(x) = \langle x, x_n - x_m\rangle$, je

$$\|f_n - f_m\| = \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

za vse $m, n \geq n_0$, kar pomeni, da je zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyevo v X^*. Ker je dualni prostor normiranega prostora Banachov, obstaja tak omejen linearni funkcional $f \in X^*$, da je $f =$

$\lim_{n\to\infty} f_n$. Po predpostavki obstaja tak vektor $x_0 \in X$, da je $f(x) = \langle x, x_0\rangle$ za vse $x \in X$. Ker je

$$\|x_0 - x_n\| = \|f - f_n\|$$

in ker je $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti x_0. Torej je X Hilbertov prostor.

(4) Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen Hilbertov prostor in K tak kompakten sebiadjungiran operator na $\mathcal{H}$, da za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ velja

$$\dim(\ker(K - \lambda I)) \leq 1 \ .$$

Naj bo A omejen operator na $\mathcal{H}$, za katerega velja $AK = KA$. Dokaži, da je A normalen operator.

Rešitev

Ker je K kompakten sebiadjungiran operator na Hilbertovem prostoru, se da operator K diagonalizirati v ortonormirani bazi prostora $\mathcal{H}$. Po predpostavki je lastni podprostor, ki ustreza poljubni lastni vrednosti, enorazsežen. Naj bo λ poljubna lastna vrednost operatorja K in naj bo x lastni vektor operatorja K glede na λ. Zaradi

$$(K - \lambda I)(Ax) = A(K - \lambda I)x = 0,$$

je Ax tudi lastni vektor za K glede na λ. Ker je $\dim(K - \lambda I) = 1$, je $Ax = \mu x$ za nek $\mu \in \mathcal{H}$. Odtod sledi, da je A diagonalen operator glede na bazo prostora $\mathcal{H}$, sestavljeno iz ortonormiranih lastnih vektorjev operatorja K, tj., obstaja tak unitaren operator U na $\mathcal{H}$ in tak diagonalen operator D na $\mathcal{H}$, da je $A = UDU^*$. Ker je

$$A^*A = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$$

in

$$AA^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*,$$

je normalnost operatorja A ekvivalentna normalnosti diagonalnega operatorja. Ker je diagonalni operator vedno normalen, je A normalen operator.

(5) Operator $T : l^2 \to l^2$ je podan s predpisom

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

(a) Dokaži, da je T omejen linearen operator na l^2 in izračunaj njegovo normo.

(b) Izračunaj T^*.

(c) Izračunaj lastne vrednosti operatorja T.

(d) Ali je operator T kompakten? Odgovor utemelji!

Rešitev

Točke (a), (b) in (c) so posebni primer naloge 8 iz domače naloge, saj je $a = \{\frac{1}{2^{n-1}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. Točk (a) in (b) se lahko lotimo na standarden način, vendar si bomo pomagali z zapisom

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\langle x, a\rangle, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

(a) Operator T je linearen, saj je vsota operatorja $e_1 \otimes a$ ranga 1 in operatorja S desnega pomika. Ker je

$$\|Tx\|^2 = |\langle x, a\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \|x\|^2\|a\|^2 + \|x\|^2 = (1 + \|a\|^2)\|x\|^2,$$

je operator T omejen in velja $\|T\| \leq \sqrt{1 + \|a\|^2}$. Enakost dosežemo, če vstavimo $x = \frac{a}{\|a\|}$. Torej je

$$\|T\| = \sqrt{1 + \|a\|^2} = \sqrt{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

(b) Velja

$$T^* = (e_1 \otimes a + S)^* = a \otimes e_1 + S^*$$

in zato

$$T^*x = \langle x, e_1\rangle\, a + (x_2, x_3, x_4, \ldots) = (a_1x_1 + x_2, a_2x_1 + x_3, a_3x_1 + x_4, \ldots).$$

Sedaj vstavimo $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

(c) Pri reševanju enačbe $Tx = \lambda x$ dobimo neskončen sistem

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1 & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} \\ \lambda x_2 & = & x_1 \\ \lambda x_3 & = & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda x_n & = & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} .$$

Torej, za poljuben $n \geq 2$ velja $x_n = \frac{1}{\lambda}x_{n-1} = \cdots = \frac{1}{\lambda^{n-1}}x_1$. Jasno je, da x_1 ni enak 0, sicer bi bil lastni vektor ničeln, kar pa gotovo ni. Vstavimo v prvo enačbo, delimo z x_1 in dobimo

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda)^{n-1}}.$$

Geometrijska vrsta na desni strani konvergira, če je $|\lambda| > \frac{1}{2}$. Ko seštejemo geometrijsko vrsto, dobimo

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{1}{2\lambda}} = \frac{2\lambda}{2\lambda - 1}$$

oziroma $2\lambda - 1 = 2$ ($\lambda \neq 0$), kar pomeni $\lambda = \frac{3}{2}$. Ustrezni lastni vektor je enak $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$.

(d) Operator T ni kompakten, saj je $S^*T = I_{l^2}$, ki ni kompakten. Lahko bi tudi pogledali, v katero zaporedje operator T preslika standardno bazo prostora l^2 in pokazali, da nima konvergentnega podzaporedja.