Ime in Priimek: ______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

3. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

7. julij 2011

(1) (a) Naj bo K neprazna konveksna podmnožica v vektorskem prostoru s skalarnim produktom, δ pozitivno realno število in α razdalja med danim vektorjem z in množico K. Dokaži, da razdalja med poljubnima elementoma množice

$$\{x \in K : \|x - z\| \le \alpha + \delta\}$$

ni večja kot $2\sqrt{\delta(2\alpha + \delta)}$.

(b) Naj bo K neprazna konveksna zaprta podmnožica Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ in α razdalja med danim vektorjem $z \in \mathcal{H}$ in množico K. Z uporabo točke (a) dokaži znano dejstvo (s predavanj), da obstaja natanko en vektor $x_0 \in K$, da je $\|x_0 - z\| = \alpha$.

(2) Naj bosta E in F različna komutirajoča idempotentna omejena operatorja na Banachovem prostoru. Kakšno je zaporedje lihih potenc operatorja $E-F$, tj. zaporedje $\{(E-F)^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$? Dokaži, da je $\|E - F\| \ge 1$.

(3) Na prostoru l^2 je podan operator A s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5, \ldots).$$

(a) Dokaži, da je A omejen in izračunaj njegovo normo.

(b) Izračunaj A^*.

(c) Ali je A injektiven? Določi $\dim \ker A$.

(4) Naj bo z kompleksno število z absolutno vrednostjo 1. Naj bo A tak kompakten operator na kompleksnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, da velja $A^* = zA$. Dokaži, da je operator A diagonalizabilen. Pokaži, da vse njegove lastne vrednosti ležijo na neki premici skozi izhodišče. Kateri?

(5) Omejen integralski operator $K\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ je za zvezne funkcije $f \in L^2[0,1]$ definiran s predpisom

$$(Kf)(x) = \int_0^1 \min\{1-x, 1-y\} \cdot f(y)\, dy.$$

(a) Dokaži, da je K kompakten sebiadjungiran operator.

(b) Zapiši Sturm-Liouvillov operator L, kateremu pripada operator K. Določiti je treba tudi definicijsko območje operatorja L.

(c) Pokaži, da je $\langle Lu, u\rangle > 0$ za vse neničelne funkcije u iz definicijskega območja operatorja L.

(d) Izračunaj vse lastne vrednosti in lastne vektorje operatorja L.

(e) Izračunaj normo operatorja K.