3. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

17. 6. 2013

(1) Za vsak $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ definirajmo
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\ .$$

(a) Dokaži, da je f omejen linearen funkcional na Hilbertovem prostoru l^2.

(b) Določi njegovo normo!

(c) Naj bo $a^{(k)}$ vektor v l^2, ki ima prvih k komponent enakih 1, naprej pa same ničle. Izračunaj limito
$$\lim_{k\to\infty} f(a^{(k)}).$$

(2) Naj bo $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tako omejeno zaporedje pozitivnih števil, da je $\inf_{n\in\mathbb{N}} d_n > 0$. Naj bo $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ diagonalen operator na Hilbertovem prostoru l^2, opremljenim s standardnim skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Preslikava $[\cdot,\cdot] : l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$ je definirana s predpisom
$$[x, y] := \langle Dx, y\rangle\ .$$

(a) Dokaži, da je $[\cdot,\cdot]$ skalarni produkt na l^2 in da je pripadajoča norma ekvivalentna običajni normi na l^2.

(b) Ali je $(l^2, [\cdot,\cdot])$ Hilbertov prostor?

(c) Naj bo $(a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ matrika, ki pripada danemu operatorju A na l^2 glede na standardno bazo prostora l^2. Izračunaj matriko, ki pripada adjungiranemu operatorju k A glede na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$.

(3) Naj bodo A, B in C operatorji na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, katerih norme so manjše ali enake 1. Naj bo C izometrija in $2C = A + B$. Dokaži, da je $A = B = C$.

(4) Naj bosta A in B kompaktna sebiadjungirana operatorja na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Naj bo operator A pozitivno definiten, operator $AB + BA$ pa pozitivno semidefiniten.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{H}$ separabilen.

(b) Dokaži, da je B pozitivno semidefiniten.

(5) Operator A na Hilbertovem prostoru l^2 je podan s predpisom
$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{4}, \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{8}, \ldots, \frac{x_{2n-1}}{2^n} + \frac{x_{2n}}{2^n}, \frac{x_{2n-1}}{2^n} + \frac{x_{2n}}{2^{n+1}}, \ldots\right).$$

(a) Dokaži, da je A kompakten operator.

(b) Predstavi ga z neskončno matriko glede na standardno bazo prostora l^2.

(c) Operator A diagonaliziraj.

(d) Izračunaj njegovo normo!