IME IN PRIIMEK:____________________ VPISNA ŠT.: | | | | | | | | |

2. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

24. marec 2011

(1) Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Za poljuben vektor $a \in V \backslash \{0\}$ definirajmo $a' = \frac{1}{\|a\|^2}\, a$.

(a) Dokaži, da za neničelna vektorja $a, b \in V$ velja
$$\|a' - b'\| = \frac{\|a-b\|}{\|a\|\,\|b\|}.$$

(b) Dokaži, da za poljubne vektorje $a, b, c \in V$ velja
$$\|a-c\|\,\|b\| \le \|a-b\|\,\|c\| + \|b-c\|\,\|a\|.$$

(2) Dokaži, da je s predpisom
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x_n}{\sqrt{n!}}\ , \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$$
definiran omejen linearen funkcional f na Hilbertovem prostoru l^2. Določi njegovo normo!

(3) Naj bosta A in B omejena linearna operatorja na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, za katera velja $\|Ax\| \le \|Bx\|$ za vsak $x \in \mathcal{H}$. Če je operator B^*B kompakten, pokaži, da sta tudi operatorja A in B kompaktna.

(4) Naj bo linearen operator $A : l^2 \to l^2$ podan z
$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = \left(x_1 - x_2, x_2, \frac{x_3 - x_4}{2}, \frac{x_4}{2}, \ldots, \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{n}, \frac{x_{2n}}{n}, \ldots\right).$$

(a) Dokaži, da je A kompakten operator.

(b) Določi lastne vrednosti operatorja $B = A^*A$.

(c) Izračunaj normo operatorja A.

(d) Dokaži, da obstajata tak unitaren operator U na l^2 in tak pozitiven diagonalen kompakten operator D na l^2, da velja $B = U^*DU$.

(5) Naj bo Y podprostor kompleksnega normiranega prostora X. Naj bosta $f : Y \to \mathbb{C}$ in $g : X \to \mathbb{C}$ taka omejena linearna funkcionala, da je $|f(y)| \le |g(y)|$ za vse $y \in Y$. Dokaži, da obstaja tak omejen linearen funkcional $F : X \to \mathbb{C}$, da velja $F|_Y = f$ in $|F(x)| \le |g(x)|$ za vse $x \in X$. Pokaži, da velja tudi $\|f\| \le \|F\| \le \|g\|$.