2. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

18. 3. 2013

(1) Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj za zaporedji vektorjev $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz zaprte enotske krogle prostora $\mathcal{V}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = 1.$$

Dokaži, da zaporedji $\{x_n - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirata! Določi njuni limiti.

(2) Naj bo $a \in l^2$ poljuben vektor. Definirajmo operator $T_a : l^2 \to l^2$ s predpisom

$$T_a x = (\langle x, a\rangle, x_1, x_2, \ldots).$$

(a) Dokaži, da je T_a omejen linearen operator na l^2 in izračunaj njegovo normo.
(b) Izračunaj T_a^*.
(c) V primeru $a = (1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots)$ izračunaj lastne vrednosti operatorja T_a.
(d) Ali je operator T_a kompakten? Odgovor utemelji!

(3) Naj bo $\mathcal{C}([a,b])$ Banachov prostor vseh realnih zveznih funkcij na intervalu $[a,b]$, opremljen s supremum normo $\|\cdot\|_\infty$. Dokaži, da je separabilen. Vse korake v dokazu dobro utemelji!

(4) Naj bo K tak sebiadjungiran kompakten operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, da obstaja limita

$$P := \lim_{n\to\infty} K^{2n}$$

v Banachovem prostoru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dokaži, da je P ortogonalni projektor končnega ranga. Navedi vsa števila, ki so lahko lastne vrednosti operatorja K.

(5) Dokaži, da obstaja tak omejen linearen funkcional f na Banachovem prostoru l^∞, da je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \ldots + 2^{n-1}x_n}{2^n}$$

za vse $x \in l^\infty$, za katere ta limita obstaja. Naj bo $\mathcal{F}$ množica vseh takih funkcionalov. Določi

$$\min\{\|f\| : f \in \mathcal{F}\}.$$