# 2. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

24. 3. 2014

(1) Realen vektorski prostor vseh polinomov $\mathbb{R}[x]$ opremimo s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Naj bo

$$Y = \left\{\sum_{m=0}^{n} a_m x^{2m} : \ n \in \mathbb{N}, a_m \in \mathbb{R}\right\}$$

in

$$Z = \left\{\sum_{m=0}^{n} b_m x^{2m+1} : \ n \in \mathbb{N}, b_m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dokaži, da je $Y \perp Z$ v $\mathbb{R}[x]$ in da velja $\mathbb{R}[x] = Y \oplus Z$.

**Rešitev**

Ni težko preveriti, da sta $Y$ in $Z$ podprostora v $\mathbb{R}[x]$. Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}_0$. Tedaj je

$$\left\langle x^{2m}, x^{2n+1}\right\rangle = \int_{-1}^{1} x^{2m+2n+1}dx = \frac{1}{2m+2n+2}x^{2m+2n+2}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Odtod sledi, da velja

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}, \sum_{j=1}^{m} b_j x^{2j+1}\right\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j \left\langle x^{2i}, x^{2j+1}\right\rangle = 0$$

in zato je $Y \perp Z$.

Če je $p$ poljuben polinom v $\mathbb{R}[x]$, potem je $q(x) = \frac{p(x)+p(-x)}{2} \in Y$, $r(x) = \frac{p(x)-p(-x)}{2} \in Z$ in velja $p = q + r$.

(2) Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $A$ normalen operator na $\mathcal{H}$. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\ker A^n = \ker A$.

**Rešitev**

Očitno je $\ker A \subseteq \ker A^n$. Za dokaz obratne inkluzije vzemimo, da je $A^n x = 0$, torej $A(A^{n-1}x) = 0$. Tedaj je

$$A^{n-1}x \in \ker A \cap \mathrm{im} A \subseteq \ker A \cap (\ker A^*)^{\perp} = \ker A \cap \ker A^{\perp} = \{0\},$$

saj zaradi normalnosti operatorja velja $\ker A^* = \ker A$. Torej je $A^{n-1}x = 0$. Če je $n-1 > 1$, razmislek ponovimo. Po $n-1$ korakih dobimo $Ax = 0$, kar smo želeli videti.

(3) Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran sistem v $\mathcal{H}$ in $T$ omejen operator na $\mathcal{H}$.

(a) Dokaži, da za vsak omejen linearen funkcional $f$ na $\mathcal{H}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f(Te_n) = \lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0.$$

(b) Če je $T$ kompakten, potem dokaži, da je $\lim_{n\to\infty} Te_n = 0$.

**Rešitev**

(a) Naj bo $f$ omejen linearni funkcional na $\mathcal{H}$. Potem po Rieszovem izreku obstaja tak vektor $y \in \mathcal{H}$, da je $f(x) = \langle x, y\rangle$ za vse $x \in \mathcal{H}$. Iz enakosti $f(e_n) = \langle e_n, y\rangle$ in Besselove neenakosti sledi, da velja

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0.$$

Na podoben način vidimo, da iz

$$f(Te_n) = \langle Te_n, y\rangle = \langle e_n, T^* y\rangle$$

sledi, da je $\lim_{n\to\infty} f(Te_n) = 0$.

(b) Naj bo sedaj $T$ kompakten operator na $\mathcal{H}$. Predpostavimo, da zaporedje $\{Te_n\}_n$ ne konvergira proti 0. Zato obstaja tak $c > 0$ in ustrezno podzaporedje $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ zaporedja $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da velja

$$\|Te_{n_k}\| \geq c$$

za vse $k \in \mathbb{N}$. Zaradi kompaktnosti operatorja $T$ obstaja tako podzaporedje $\{e_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, da velja

$$\lim_{j\to\infty} Te_{n_{k_j}} = y.$$

Ker je norma zvezna preslikava, je $\|y\| \geq c$. Po drugi strani pa iz (a) sledi $f(y) = \lim_{j\to\infty} f(Te_{n_{k_j}}) = 0$ za vse $f \in \mathcal{H}^*$. V posebnem primeru je $\langle y, y\rangle = 0$ in zato $y = 0$. Protislovje !

(4) Dokaži, da za vsak $t \in [a, b]$ in za vsako zvezno funkcijo $f$ na $[a, b]$, za katero velja $f(t) = 0$, obstaja zaporedje polinomov $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki na intervalu $[a, b]$ konvergira enakomerno proti funkciji $f$ in velja $p_n(t) = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

**Rešitev**

Po Weierstrassovem izreku obstaja tako zaporedje polinomov $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki na $[a, b]$ enakomerno konvergira proti funkciji $f$. Naj bo $\epsilon > 0$ poljuben. Definirajmo $p_n = q_n - q_n(t)$. Za polinom $p_n$ velja $p_n(t) = 0$. Naj bo $n_0$ tak, da za vse $n \geq n_0$ in vse $x \in [a, b]$ velja $|q_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Tedaj za vse $x \in [a, b]$ in $n \geq n_0$ velja

$$|p_n(x) - f(x)| = |q_n(x) - q_n(t) - f(x)| \leq |q_n(x) - f(x)| + |q_n(t) - f(t)| < \epsilon.$$

(5) Linearen operator $K : l^2 \to l^2$ je podan s predpisom

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{3}, \ldots, \frac{x_{2n-1}}{n+1}, \frac{x_{2n-1}}{n+2} + \frac{x_{2n}}{n+1}, \ldots\right).$$

(a) Dokaži, da je $K$ kompakten operator.

(b) Klasificiraj spekter in določi lastne podprostore operatorja $K$.

(c) Izračunaj $K^*$ in $\|K^*K\|$. Koliko je $\|K\|$?

**Rešitev**

(a) Definirajmo operatorja $K_1$ in $K_2$ na $l^2$ z naslednjima predpisoma:

$$K_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_1}{3}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots, \frac{x_{2n-1}}{n+1}, \frac{x_{2n-1}}{n+2} \ldots, \right)$$

in

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots) = \left(0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{3}, \ldots, 0, \frac{x_{2n}}{n+1}, \ldots, \right).$$

Operatorja $K_1$ in $K_2$ lahko zapišemo kot produkt omejenega in kompaktnega operatorja (katerih?), odkoder sledi, da sta $K_1$ in $K_2$ kompaktna in zato je tudi njuna vsota $K_1 + K_2 = K$ kompaktna.

(b) Iz enačbe $Kx = \lambda x$ dobimo

$$\begin{aligned} \lambda x_{2n-1} &= \tfrac{x_{2n-1}}{n+1} \\ \lambda x_{2n} &= \tfrac{x_{2n-1}}{n+2} + \tfrac{x_{2n}}{n+1} \end{aligned}$$

za vse $n \in \mathbb{N}$. Če $x_{2n-1} \neq 0$, potem je $\lambda = \frac{1}{n+1}$. Iz druge enačbe sledi $x_{2n-1} = 0$, kar je protislovje. Zato je $x_{2n-1} = 0$, lastna vrednost je $\frac{1}{n+1}$, pripadajoči lastni podprostor je linearna ogrinjača vektorja $e_{2n}$. Točkasti spekter operatorja $K$ je enak $\{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. V spektru je še točka 0, ki pa je v zveznem delu spektra, saj je operator $K$ injektiven, njegova zaloga vrednosti pa vsebuje vse standardne bazne vektorje in je zato gosta v $l^2$.

(c) Z direktnim računom vidimo, da velja

$$K^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots, ) =$$
$$= \left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{3}, \frac{y_2}{2}, \frac{y_3}{3} + \frac{y_4}{4}, \frac{y_4}{3}, \ldots, \frac{y_{2n-1}}{n+1} + \frac{y_{2n}}{n+2}, \frac{y_{2n}}{n+1}, \ldots\right).$$

Ker je operator $K^*K$ kompakten in sebiadjungiran, je $\|K^*K\|$ največja lastna vrednost operatorja $K^*K$. Ker ima $K^*K$ v standardni bazi bločno diagonalno matriko, katere diagonalni bloki so velikosti dva, je treba izračunati največjo lastno vrednost matrike

$$\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Za rezultat dobimo $\|K\|^2 = \|K^*K\| = \frac{11+2\sqrt{10}}{36}$.