Ime in Priimek: ____________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

4. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

19. 9. 2011

(1) Naj bo $\mathcal{H}$ separabilen Hilbertov prostor, f omejen linearen funkcional na $\mathcal{H}$ in $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleten ortonormiran sistem v $\mathcal{H}$. Dokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(e_n)}\, e_n$$

konvergira proti nekemu vektorju $y \in \mathcal{H}$. V kakšni relaciji je y z vektorjem, ki pripada funkcionalu f po Rieszovem izreku o reprezentaciji?

(2) Dokaži, da je omejen linearen operator T na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ bijektiven natanko takrat, ko obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle T^*Tx - \epsilon x, x\rangle \geq 0 \qquad \text{in} \qquad \langle TT^*x - \epsilon x, x\rangle \geq 0.$$

(3) Na Banachovem prostoru $\mathcal{C}[0,1]$, opremljenim s supremum normo $\|\cdot\|_\infty$, je podan linearen operator

$$(Kf)(x) = \sin x \cdot \int_0^1 f(t)dt.$$

(a) Dokaži, da je K omejen linearen operator in izračunaj njegovo normo.

(b) Ali je K kompakten operator? Odgovor utemelji.

(c) Klasificiraj spekter operatorja K.

(4) Naj bo K injektiven kompakten pozitivno semidefiniten operator na neskončnorazsežnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Pokaži, da obstaja tako zaporedje $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompaktnih pozitivno semidefinitnih operatorjev na $\mathcal{H}$, da za vsak $x \in \mathcal{H}$ zaporedji $\{KK_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{K_nKx\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirata proti x. Ali lahko zahtevamo še, da zaporedje $\{KK_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti identičnemu operatorju? Odgovor utemelji!

(5) Naj bodo $x_1, \ldots, x_n$ linearno neodvisni vektorji normiranega prostora X. Dokaži, da za poljubno izbrane skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ obstaja tak omejen linearen funkcional f na X, da za vsak $1 \leq j \leq n$ velja $f(x_j) = \alpha_j$.