4. izpit iz predmeta UVOD V FUNKCIONALNO ANALIZO

17. 9. 2013

(1) Naj bo f zvezna realna funkcija na intervalu $[0, \pi]$. Dokaži, da velja

$$\left| \int_0^\pi f(x) \sin x dx \right|^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x)^2 dx.$$

(2) Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in f omejen linearen funkcional na $\mathcal{H}$. Vektorski prostor $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ opremimo s skalarnim produktom

$$\langle x \oplus y, z \oplus w \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, w \rangle, \qquad x, y, z, w \in \mathcal{H}.$$

Na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ definirajmo linearen funkcional F s predpisom

$$F(x \oplus y) = f(x + y), \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Dokaži, da obstaja tak vektor $z \in \mathcal{H}$, da je $F(x \oplus y) = \langle x \oplus y, z \oplus z \rangle$ za vse $x, y \in \mathcal{H}$.

(3) Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen Hilbertov prostor in A omejen operator na $\mathcal{H}$.
(a) Poišči taka sebiadjungirana operatorja B in C, da velja $A = B + iC$.
(b) Dokaži, da velja

$$\|A\| \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| \geq \frac{1}{2} \|A\|.$$

(4) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo taka enotska vektorja x_n in y_n neskončno razsežnega Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, da je $\mathrm{lin}\{x_n, y_n\} \perp \mathrm{lin}\{x_m, y_m\}$ za vsa različna naravna števila m in n. Definirajmo

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x_n \otimes y_n + y_n \otimes x_n).$$

(a) Dokaži, da je A omejen sebiadjungiran operator.
(b) Dokaži, da je A kompakten operator.
(c) Operator A diagonaliziraj.

(5) Naj bo X realen normiran prostor, Y njegov podprostor in $A : Y \to \mathbb{R}^2$ omejen linearen operator, kjer je prostor $\mathbb{R}^2$ opremljen z maksimum normo: $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$. Dokaži, da lahko operator A razširimo do operatorja $\tilde{A} : X \to \mathbb{R}^2$, za katerega velja $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.